

# Comparative Analysis of Compressive Stress–Strain Constitutive Models for High-Strength Self-Compacting Concrete with High Rubber Content: Proposal of an Optimized Hybrid Model Based on Experimental Data

Hamidreza Arasteh<sup>1</sup>, Alireza Khaloo<sup>2\*</sup>

1-Master's student in Structural Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

2-Distinguished Professor, Department of civil engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran  
khaloo@sharif.edu

Received: 02 March 2025 Revised: 15 April 2025 Accepted: 25 May 2025

Research paper

## Abstract

This research evaluates the accuracy of various commonly used constitutive models and, subsequently, proposes a combined model, termed Popovics–Guo, to more precisely predict the stress–strain curve of high-strength rubberized concrete containing high rubber content with varying volumetric replacements of sand by rubber (0%, 20%, 40%, and 60%). Axial compressive tests were performed on cylindrical and cubic specimens to obtain experimental stress–strain curves and to examine both the linear and nonlinear behavior up to the point of maximum strain in the rubberized concrete. The performance of the constitutive models was evaluated using statistical criteria such as RMSE,  $R^2$ , and MAE, in addition to graphical comparisons. The results indicate that, with an increase in rubber content coupled with the high compressive strength of the concrete, the prediction errors of the existing models in various segments of the stress–strain curve increase significantly, resulting in a poor match with the experimental data. Consequently, the suggested combined Popovics–Guo model was introduced, which demonstrated high accuracy in predicting the stress–strain behavior of rubberized concrete in both the ascending and descending branches (with  $R^2$  values exceeding 0.98 for all rubber replacement percentages). Furthermore, the optimal values of the empirical parameters in the Popovics, Thorenfeldt and suggested Popovics–Guo models for each rubber content, as determined in the mix design of this study, are presented. The findings of this research provide practical guidance for selecting appropriate constitutive models based on the rubber content in concrete and help highlight research gaps for the development of future models.

**Keywords:** High-Strength Rubberized Concrete, Self-Compacting Rubberized Concrete, Stress–Strain Constitutive Models, Numerical and Experimental Analysis

\*Corresponding Author: Alireza Khalo

Arasteh H., Khaloo A. Comparative Analysis of Compressive Stress–Strain Constitutive Models for High-Strength Self-Compacting Concrete with High Rubber Content: Proposal of an Optimized Hybrid Model Based on Experimental Data. *J. Concr. Struct. Mater.*, 2024; 9(2): 23-44. <http://doi.org/0.30478/jcsm.2025.510011.1386>  
2538-5828/ © 2025 The Authors. Published by Iranian Concrete Society

This is an open access article under the CC BY license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

# تحلیل تطبیقی مدل‌های رفتاری تنش - کرنش فشاری بتن خود تراکم پر مقاومت حاوی مقادیر بالای لاستیک: ارائه یک مدل پیشنهادی ترکیبی بهینه بر اساس داده‌های آزمایشگاهی

حمیدرضا آراسته<sup>۱</sup>، علیرضا خالو<sup>۲\*</sup>

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی سازه، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

۲- استاد ممتاز دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

\* پست الکترونیکی نویسنده مسئول: khaloo@sharif.edu

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۲/۱۲، تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۰۱/۲۶، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۳/۰۴

نوع مقاله: پژوهشی

## چکیده

این پژوهش به ارزیابی دقت انواع مدل‌های رفتاری متداول می‌پردازد و در ادامه با ارائه یک مدل ترکیبی به نام پاپوویکس - گو، تلاش می‌کند منحنی تنش - کرنش بتن لاستیکی پر مقاومت حاوی مقادیر بالای لاستیک با درصد‌های مختلف جایگزینی حجمی ماسه با لاستیک (۰، ۲۰، ۴۰ و ۶۰ درصد) را به نحو دقیق‌تری پیش‌بینی کند. آزمایش‌های فشاری محوری بر روی نمونه‌های استوانه‌ای و مکعبی انجام شده است تا منحنی‌های تنش - کرنش تجربی به دست آید و رفتار خطی و غیرخطی تا رسیدن به نقطه بیشینه کرنش بتن لاستیکی به تفصیل بررسی گردد. عملکرد مدل‌های رفتاری از طریق استفاده از معیارهای آماری نظیر،  $RMSE$ ،  $R^2$  و  $MAE$  و همچنین مقایسه‌های گرافیکی ارزیابی شده است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش درصد لاستیک و به طور هم‌زمان وجود مقاومت فشاری بالا در بتن، خطاهای مدل‌های موجود در پیش‌بینی منحنی تنش - کرنش در بخش‌های مختلف به طور معنی‌داری افزایش یافته و تطابق نتایج پیش‌بینی شده با داده‌های تجربی ضعیف است. به همین منظور، مدل پیشنهادی ترکیبی پاپوویکس - گو ارائه گردیده است که با دقت بالا در پیش‌بینی منحنی تنش - کرنش بتن لاستیکی در هر دوشاخه صعودی و نزولی، عملکرد قابل‌اعتمادی از خود نشان داده است (با داشتن  $R^2$  بیش از ۰/۹۸ برای تمامی درصد‌های لاستیک). علاوه بر این، مقدار بهینه پارامترهای تجربی در مدل‌های پاپوویکس، تورنفلد و مدل پیشنهادی پاپوویکس - گو برای هر درصد لاستیک در طرح اختلاط این پژوهش استخراج و ارائه گردیده است. یافته‌های این پژوهش راهنمایی کاربردی برای انتخاب مدل‌های رفتاری مناسب باتوجه به درصد لاستیک موجود در بتن و شناسایی شکاف‌های تحقیقاتی جهت توسعه مدل‌های آتی ارائه می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: بتن لاستیکی پر مقاومت، بتن خود تراکم لاستیکی، مدل‌های رفتاری تنش - کرنش، تحلیل عددی و آزمایشگاهی

بتن لاستیکی، گونه‌ای از بتن متداول و مرسوم است که در سال‌های اخیر به دلیل مزایای زیست‌محیطی و خواص مکانیکی منحصربه‌فرد، توجه زیادی را به خود جلب کرده است [۱-۴]. این ماده با جایگزینی جزئی سنگدانه در بتن با ذرات ضایعات لاستیک ساخته می‌شود که نه تنها راه حلی برای دفع ضایعات لاستیک ارائه می‌دهد، بلکه شکل‌پذیری و ظرفیت جذب انرژی بتن را نیز بهبود می‌بخشد [۵-۷]. این ویژگی‌ها بتن لاستیکی را به ویژه برای سازه‌هایی که نیاز به تحمل بارهای دینامیکی دارند، مانند ساختمان‌های مقاوم در برابر زلزله و سازه‌های تحت بار ضربه مناسب می‌کند. با این حال، جایگزین کردن لاستیک نیز به طور قابل توجهی بر خواص مقاومتی بتن تأثیر می‌گذارد. مطالعات نشان داده است که با افزایش مقادیر لاستیک، مقاومت فشاری بتن روند نزولی غیر خطی قابل توجهی را نشان می‌دهد [۸-۱۲]. به علاوه تحقیقات نشان می‌دهد کارایی بتن نیز با افزایش مقادیر لاستیک کاهش پیدا میکند [۶-۱۳، ۱۵]. در این پژوهش، با هدف رفع دو مشکل اساسی بتن‌های لاستیکی—کاهش مقاومت فشاری و کارایی—تلاش شد تا طرح اختلاطی ارائه شود که علاوه بر مزایای گوناگون نظیر شکل‌پذیری و جذب انرژی بالا به علت وجود درصدهای بالای جایگزینی لاستیک، مشکلات مقاومت فشاری و کارایی را برای استفاده در پروژه‌های سازه‌ای برطرف نماید و حتی در مقادیر بالای لاستیک در رده پر مقاومت (بالای ۴۰ مگاپاسکال) قرار گیرد.

بنابراین، حضور لاستیک در ترکیب بتن، رفتار مکانیکی آن را به طور چشمگیری تغییر می‌دهد، به طوری که کاهش مقاومت فشاری، افزایش شکل‌پذیری و نرم شدن رفتار بتن تغییرات اساسی در منحنی تنش - کرنش به وجود می‌آورد که باعث ایجاد چالش‌های جدی در مدل‌سازی و انتخاب مدل مناسب برای این ماده می‌شود. در سال‌های گذشته تمرکز تحقیقات بیشتر بر روی خواص مکانیکی خاصی از بتن‌های لاستیکی نظیر مقاومت فشاری و مدل الاستیسیته بوده است در این راستا، توسعه و ارزیابی مدل‌های رفتاری برای پیش‌بینی پاسخ بتن لاستیکی تحت فشار، به‌عنوان نیازی اساسی در طراحی ایمن و پایدار سازه‌ها با این نوع بتن شناخته می‌شود. لی و همکاران [۱۶] در سال ۲۰۱۴ یک معادله رفتاری را برای بتن لاستیکی با مقادیر کم بر اساس روش گو ارایه دادند که قادر به پیش‌بینی رفتار بتن با ضریب خطای  $R^2$  در حدود ۰/۸ بود با این حال با توجه به نیاز استفاده از لاستیک با مقادیر بالا به عنوان جایگزین بخشی از بتن و همچنین پیش‌بینی رفتار به صورت دقیق‌تر نیازمند تحقیقات گسترده‌تر در این زمینه بود. بمپا و همکاران [۱۷] در سال ۲۰۱۷ با یک پژوهش آزمایشگاهی بر روی بتن با جایگزینی ۲۰،۴۰ و ۶۰ درصد حجمی مواد سنگی با لاستیک که باعث کاهش مقاومت بتن از حدود ۷۰ مگاپاسکال به حدود ۷ مگاپاسکال شد؛ رابطه‌ای غیر خطی جهت پیش‌بینی رفتار بتن لاستیکی در شاخه‌های صعودی و نزولی به طور جداگانه ارایه دادند. همچنین استروکار و همکاران [۱۸] در سال ۲۰۱۸ با مطالعه‌ای تجربی به ارزیابی مدل‌های بمپا [۱۷] و لی [۱۶] پرداختند و مدلی بهبود یافته جهت پیش‌بینی بتن لاستیکی تا ۴۰ درصد جایگزینی لاستیک ارائه دادند. هان و همکاران [۱۹] در سال ۲۰۲۴ بر اساس رابطه گو [۲۰] مدلی بهبود یافته برای رفتار بتن لاستیکی ارایه کردند و با پژوهشی تجربی با استفاده از درصدهای پایین جایگزینی لاستیک به عنوان بخشی از بتن و مقاومت‌های حدوداً ۳۰ مگاپاسکال به ارزیابی آن پرداختند.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در حوزه پژوهش‌های آزمایشگاهی و بررسی عددی مدل‌های رفتاری بتن لاستیکی، مطالعات محدودی به‌ویژه در زمینه بتن‌های حاوی مقادیر بالای لاستیک و مقاومت فشاری بالا انجام شده است. در این راستا، هدف اصلی این پژوهش بررسی مدل‌های رفتاری پرکاربرد و ارزیابی دقیق میزان خطای آن‌ها در پیش‌بینی رفتار این نوع بتن خاص است؛ به طوری که علی‌رغم وجود مقادیر بالای لاستیک، مقاومت فشاری بتن بالا باقی بماند. همچنین، ارائه یک مدل رفتاری ترکیبی و کاربردی به‌گونه‌ای که منحنی تنش - کرنش بتن را در هر دو شاخه صعودی و نزولی با دقت مطلوب پیش‌بینی کند، از اهداف مهم این پژوهش

به شمار می‌آید. به همین منظور، ابتدا بتن مطابق با مشخصات ذکر شده تهیه گردید و سپس با استفاده از تطبیق داده‌های تجربی، ارزیابی مدل‌ها صورت می‌پذیرد.

## ۲- برنامه مطالعه آزمایشگاهی

در این پژوهش، بتن آزمایشگاهی طبق طرح اختلاط مندرج در جدول (۱) و با فرض دستیابی به مقاومت ۷۵ مگاپاسکال تهیه گردید. مخلوط‌ها با با محتوای ثابت کل مواد چسباننده<sup>۱</sup> معادل ۱۲۵۰ کیلوگرم بر مترمکعب و نسبت آب به مواد چسباننده ثابت ۰/۱۶ طراحی شدند. درشت دانه<sup>۲</sup> (شن) و ریزدانه<sup>۳</sup> (ماسه)، با انواع دو نوع لاستیک به صورت مش<sup>۴</sup> (پودر) و خرده لاستیک<sup>۵</sup> با اندازه‌های ۳ تا ۱ میلی‌متر در سه مقدار حجمی ۲۰، ۴۰ و ۶۰ درصد جایگزین ریزدانه شدند. منحنی‌های دانه بندی برای ریزدانه و درشت دانه و لاستیک مطابق با استاندارد [۲۱] ASTM C136/C136M-14 در شکل (۱) نمایش داده شدند. همچنین وزن مخصوص ذرات لاستیک، شن و ماسه مطابق با استانداردهای [۲۲] ASTM C127 و [۲۳] ASTM C128 اندازه‌گیری شد و نتایج در جدول (۲) نشان داده شده است.

این مواد طبق مراحل زیر در میکسر به طور یکنواخت مخلوط شدند: ابتدا، پس از اطمینان از مرطوب بودن سطح میکسر، سنگ‌دانه‌های درشت و ریز به مدت ۴۵ ثانیه با یکدیگر مخلوط شدند؛ سپس لاستیک‌های مطرح‌شده در دو سایز مذکور به ترکیب اضافه شده و به مدت ۱ دقیقه همگام مخلوط گردیدند. پس از آن، نیمی از آب طرح به مواد افزوده شده و مخلوط به مدت تقریبی ۱ دقیقه ادامه یافت. در مرحله بعد، مواد چسباننده شامل سیمان پرتلند تیپ<sup>۶</sup> و میکروسیلیس<sup>۷</sup> به ترکیب افزوده شده و پس از حصول یک ترکیب یکدست، باقی‌مانده آب و فوق روان‌کننده<sup>۸</sup> به تدریج طی ۴ دقیقه به مخلوط اضافه گردید؛ در ادامه، فرآیند مخلوط کردن کلیه مواد به مدت ۳ دقیقه ادامه یافت.

مخلوط نهایی در قالب‌های استوانه‌ای با ابعاد ۲۰×۱۰ سانتی‌متر ریخته شد و برای هر درصد جایگزینی لاستیک، حداقل ۴ نمونه بتن ریزی گردید. پس از گذشت ۳۶ ساعت، نمونه‌ها از قالب خارج شده و به مدت ۲۸ روز در حوضچه‌ای با دمای ثابت ۲۵ درجه سانتی‌گراد قرار داده شدند؛ سپس نمونه‌ها از آب خارج شده و پس از یک روز خشک‌شدن، جهت انجام آزمایشات آماده گردیدند. برای انجام تست فشاری مطابق استاندارد [۲۴] ASTM C39 و استخراج منحنی‌های تنش - کرنش، از جک مجهز به قابلیت کنترل دقیق جابه‌جایی و صفحه لغزان به‌منظور اطمینان از توزیع یکنواخت نیرو بر سطح نمونه استفاده شد؛ علاوه بر این، جابه‌جایی یک‌سوم میانی نمونه به وسیله LVDT با دقت بالا اندازه‌گیری گردید.

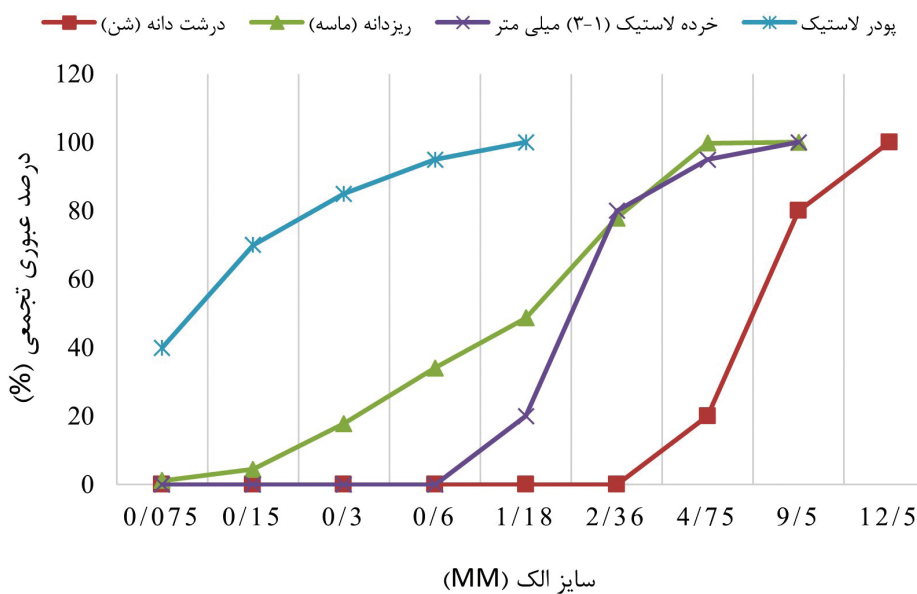
- 1 Binder
- 2 Coarse aggregate
- 3 Fine aggregate
- 4 Powder Rubber
- 5 Crumb Rubber
- 6 Type II Portland cement
- 7 Silica fume
- 8 Superplasticizer

جدول ۱: طرح اختلاط بتن به ازای یک مترمکعب بر حسب کیلوگرم

نام طرح	سیمان	میکروسیلیس	آب	فوق روان کننده	درشت دانه (شن)	ریزدانه (ماسه)	خرده لاستیک (۳-۱) میلی متر	پودر لاستیک
RC <sub>0</sub>	۱۰۰۰	۲۵۰	۲۰۰	۳۶,۴	۵۰۰	۵۰۰	۰	۰
RC <sub>20</sub>	۱۰۰۰	۲۵۰	۲۰۰	۳۶,۴	۵۰۰	۴۰۰	۲۱,۶	۸,۸
RC <sub>40</sub>	۱۰۰۰	۲۵۰	۲۰۰	۳۶,۴	۵۰۰	۳۰۰	۴۳,۲	۱۷,۶
RC <sub>60</sub>	۱۰۰۰	۲۵۰	۲۰۰	۳۶,۴	۵۰۰	۲۰۰	۶۴,۸	۲۶,۴

جدول ۲: وزن مخصوص مصالح سنگی و لاستیکی

نوع مصالح	وزن مخصوص kg/m <sup>3</sup>
درشت دانه (شن)	۲۵۶۰
ریزدانه (ماسه)	۲۵۰۰
خرده لاستیک (۳-۱) میلی متر	۹۰۰
پودر لاستیک	۵۵۰



شکل ۱) منحنی دانه بندی مصالح سنگی و لاستیکی استفاده شده در طرح اختلاط



(الف)

(ب)

(ج)

(د)

شکل ۲) تصویر سنگدانه‌ها و مصالح استفاده شده در طرح اختلاط: الف) درشت دانه (شن) ب) ریزدانه (ماسه) ج) خرده لاستیک ۱-۳ میلی‌متر د) پودر لاستیک



شکل ۳) آزمایش فشاری

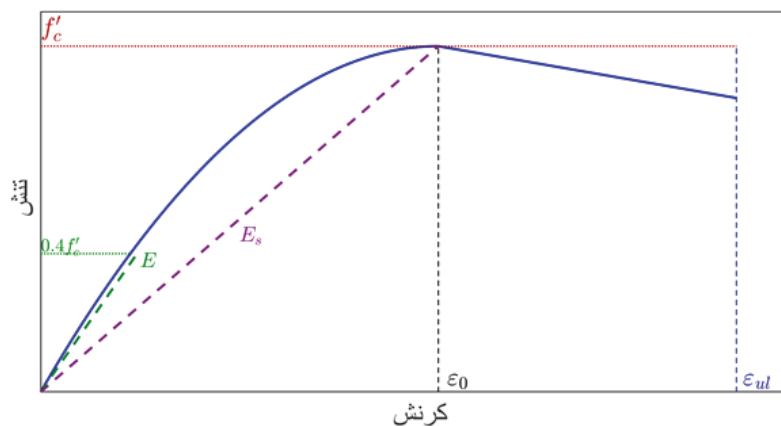
### ۳- مدل‌های رفتاری بتن

بررسی مدل‌های رفتاری تنش - کرنش بتن از دیرباز مورد توجه محققان در این زمینه قرار داشته است. این مدل‌ها به گونه‌ای رابطه بین تنش و کرنش بتن را تحت بارگذاری در نواحی خطی و غیرخطی تا انتهای نقطه شکست ارائه می‌کنند. در این پژوهش کارایی مدل‌های رفتاری مشهور که مورد استفاده بسیاری از محققین بوده است با انطباق بر نتایج آزمایشگاهی بتن لاستیکی پر مقاومت با مقادیر بالای لاستیک (۰-۲۰-۴۰ و ۶۰ درصد حجمی ماسه) مورد ارزیابی قرار گرفته است.

#### ۱-۳ پارامترهای مورد استفاده در مدل‌های رفتاری

مدل‌سازی رفتار بتن تحت بارگذاری فشاری، به عنوان پایه‌ای برای تحلیل و طراحی سازه‌های بتنی، به پارامترهای کلیدی وابسته است که رابطه تنش - کرنش را تعریف می‌کنند. این بخش به معرفی و تشریح پارامترهای اساسی مورد استفاده در مدل‌های رفتاری بتن می‌پردازد، از جمله تنش حداکثر (مقاومت فشاری مشخصه) ( $f'_c$ )، مدول الاستیسیته ( $E$ )، مدول سکانت ( $E_s$ ) کرنش متناظر با

حداکثر تنش ( $\epsilon_0$ )، کرنش نهایی ( $\epsilon_{ul}$ )، و سایر پارامترهای مرتبط. این پارامترها نقش حیاتی در پیش‌بینی دقیق رفتار بتن از جمله ناحیه خطی و غیرخطی ایفا می‌کنند.



شکل ۴) نمایش شماتیک منحنی تنش-کرنش بتن و پارامترهای مورد استفاده در مدل‌های رفتاری

### ۳-۱-۱ تنش حداکثر

تنش حداکثر در منحنی تنش کرنش بتن یا همان مقاومت مشخصه بتن که با نماد نشان داده می‌شود یک پارامتر اساسی در طراحی سازه‌های بتنی و همچنین ارزیابی منحنی رفتار تنش کرنش بتن در مدل‌های رفتاری می‌باشد. تحقیقات به طور گسترده کاهش مقاومت فشاری<sup>۹</sup> بتن لاستیکی که ذرات لاستیک<sup>۱۰</sup> به‌عنوان بخشی از ریزدانه؛ درشت‌دانه و یا سیمان جایگزین شده است را نشان می‌دهد که در نتیجه آن مقاومت فشاری به‌صورت غیرخطی<sup>۱۱</sup> با افزایش میزان لاستیک کاهش می‌یابد. به طور مثال طبق تحقیقات [۱۰] با جایگزین کردن ۱۰ درصد، ۲۰ درصد و ۳۰ درصد ماسه با پودر لاستیک مش مقاومت فشاری از ۸۰ مگاپاسکال به حدود ۶۱ مگاپاسکال رسید. همچنین تحقیقات [۲۵] نشان داد با جایگزینی به ترتیب ۱۰، ۲۰، و ۴۰ درصد ماسه با ذرات لاستیک مقاومت بتن از ۱۳۶ مگاپاسکال به ترتیب به ۱۱۶، ۱۰۴ و ۶۸ مگاپاسکال کاهش می‌یابد. در تحقیقات دیگری که توسط [۲۶] ارائه گردید هنگامی که مقادیر لاستیک از ۰٪ به ۳۰٪ افزایش یافت، مقاومت فشاری بتن با مقادیر مختلف لاستیک بین ۴۰ تا ۶۱ درصد کاهش یافت. در تحقیقات [۲۷] نیز نشان داده شد که با جایگزینی ۱۰؛ ۲۰؛ و ۳۰ درصد حجمی سنگ‌دانه به ترتیب مقاومت فشاری از مقدار ۵۵ مگاپاسکال بتن مرجع به ۳۴؛ ۴۰ و ۲۲ مگاپاسکال کاهش یافت. در پژوهشی دیگر با جایگزینی ۱۰ درصد سنگ‌دانه با لاستیک مقاومت بتن از ۳۳ مگاپاسکال به ۲۵ مگاپاسکال کاهش یافت [۲۸]. در پژوهش حاضر نیز کاهش مقاومت فشاری با افزایش مقادیر لاستیک دیده شده است.

### ۳-۱-۲ مدول الاستیسیته

مطابق با استاندارد ASTM C469 [۲۹] و استاندارد یوروکد ۲ [۳۰] مدول الاستیسیته<sup>۱۲</sup> به عنوان شیب خط از تنش صفر تا ۴۰

<sup>9</sup> Compressive strength

<sup>10</sup> Rubber particles

<sup>11</sup> nonlinear

<sup>12</sup> Elastic modulus

درصد تنش حداکثر (مقاومت فشاری مشخصه بتن) در منحنی تنش- کرنش بتن تعریف می شود. مطابق تحقیقات با افزایش میزان لاستیک مدول الاستیک بتن نیز کاهش می یابد [۱۱،۱۹]. که کاملاً منطبق با نتایج حاصل شده در این پژوهش است.

### ۳-۱-۳ مدول سکانت

منظور از مدول سکانت<sup>۱۳</sup> شیب خط کشیده شده از تنش صفر تا تنش ماکسیمم (مقاومت فشاری مشخصه بتن) در منحنی تنش - کرنش است.

### ۳-۱-۴ کرنش حداکثر و کرنش نظیر تنش ماکسیمم

به طور کلی تحقیقات افزایش کرنش در بتن لاستیکی به علت نرم تر شدن رفتار را نشان می دهند [۱۱،۳۱]. به عنوان مثال تحقیقات استروکار و همکاران [۱۸] در سال ۲۰۱۸ نشان داد با افزایش میزان لاستیک از ۰ تا ۴۰ درصد سنگدانه کرنش نهایی<sup>۱۴</sup> افزایش می یابد ولی کرنش نظیر تنش ماکسیمم<sup>۱۵</sup> ابتدا کاهش و سپس افزایش داشته است. نتایج تحقیقات کاملاً منطبق با نتایج بدست آمده در این پژوهش می باشد.

نتایج حاصل از آزمایش و پارامترهای مورد نیاز جهت ارائه مدل های رفتاری در جدول شماره (۳) به تفصیل بیان گردیده است.

جدول ۳: خواص مکانیکی و مشخصات منحنی تنش کرنش استخراج شده از نتایج آزمایشگاهی

خاصیت مکانیکی واحد	۰٪ لاستیک	۲۰٪ لاستیک	۴۰٪ لاستیک	۶۰٪ لاستیک
مقاومت فشاری ( $f'_c$ ) MPa	۷۶،۳۷	۶۲،۳۹	۵۱،۱۱	۴۳،۶۸
مدول الاستیسیته ( $E$ ) MPa	۱۹۹۲۳،۱۴	۱۴۷۲۴،۱۳	۱۱۸۱۶،۰۵	۱۱۱۵۷،۲۹
مدول سکانت ( $E_s$ ) MPa	۱۹۹۲۲،۴۲	۱۴۳۴۱،۴۱	۹۸۵۸،۷۴	۸۹۷۹،۹۸
کرنش نظیر تنش ماکسیمم ( $\epsilon_0$ )	۰،۰۰۳۸	۰،۰۰۴۴	۰،۰۰۵۲	۰،۰۰۴۹
کرنش نهایی ( $\epsilon_{ul}$ )	۰،۰۰۴۰	۰،۰۰۴۹	۰،۰۰۶۱	۰،۰۰۶۵

### ۳-۲-۳ مدل رفتاری هاگنستاد

مدل رفتاری هاگنستاد<sup>۱۶</sup> به عنوان یکی از مدل های کلاسیک توصیف رفتار تنش - کرنش بتن تحت فشار محوری، نخستین بار توسط اوین هاگنستاد و همکاران [۳۲] در سال ۱۹۵۵ ارائه شد. این مدل مبتنی بر رابطه سهموی برای شاخه صعودی (پیش از رسیدن به تنش حداکثر بتن) و یک رابطه خطی برای شاخه نزولی (پس از تنش حداکثر و تا نقطه شکست نهایی) است. معادله سهموی شاخه صعودی و رابطه خطی برای قسمت نزولی دیاگرام به صورت رابطه (۱) ارائه شده است.

$$(1)$$

<sup>13</sup> Secant modulus

<sup>14</sup> Ultimate strain

<sup>15</sup> Peak strain

<sup>16</sup> Hognestad constitutive model

$$\sigma = \begin{cases} f'_c \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] & \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ f'_c \left[ 1 - 0.15 \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_0} \right) \right] & \varepsilon_0 < \varepsilon \leq \varepsilon_{cu} \end{cases} \quad (1)$$

باتوجه به تطابق گسترده مدل هاگنستاد [۳۲] با یافته‌های تجربی این مدل رفتار بتن های مقاومت بالا و محصور شده که از افت تنش ناگهانی یا تغییرات غیرخطی پیچیده در شاخه نزولی تبعیت میکنند با محدودیت روبرو است.

### ۳-۳- مدل رفتاری سائز

این مدل نخستین بار توسط سائز<sup>۱۷</sup> [۳۳] در سال ۱۹۶۴ ارائه گردید که به عنوان یکی از مدل های کلاسیک و مراجع پایه در زمینه مدلسازی رفتار غیر خطی بتن شناخته می شود که به علت دقت بالا در پیش بینی رفتار بتن در مقایسه با نتایج آزمایشگاهی و به صورت یک مدل تک معادله ای برای شاخه صعودی و نزولی مورد توجه قرار داشته است. رابطه سائز [۳۳] به صورت رابطه (۲) ارایه شده است.

$$\sigma = \frac{E_0 \varepsilon}{1 + \left( \frac{E_0}{E_s} - 2 \right) \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2} \quad (2)$$

### ۳-۴- مدل رفتاری کنت-پارک

نخستین بار در سال ۱۹۷۱، کنت و پارک<sup>۱۸</sup> [۳۴] با اصلاح رابطه هاگنستاد [۳۲] برای شاخه نزولی یک رابطه خطی را در دو حالت بتن محصور و غیرمحصور ارایه کردند و قسمت صعودی منحنی مشابه مدل هاگنستاد [۳۲] می باشد که به شکل سهمی است. رابطه ارایه شده برای بتن غیرمحصور به صورت رابطه (۳) می باشد.

$$\sigma = \begin{cases} f'_c \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] & \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ f'_c [1 - Z(\varepsilon - \varepsilon_0)] & \varepsilon_0 < \varepsilon \leq \varepsilon_{cu} \end{cases} \quad (3)$$

که در آن  $Z$  شیب ناحیه نزولی است که بر اساس نتایج آزمایشگاهی کالیبره می شود و به صورت تقریبی از رابطه (۴) محاسبه می گردد.

$$Z = \frac{0.5}{\varepsilon_{50u} - \varepsilon_0} \quad (4)$$

منظور از  $\varepsilon_{50u}$  در رابطه فوق کرنش متناظر با تنش برابر ۵۰ درصد ماکسیمم در ناحیه نزولی می باشد.

<sup>17</sup> saenz

<sup>18</sup> Kent & Park

### ۳-۵- مدل رفتاری پاپوویکس

مدل رفتاری پاپوویکس<sup>۱۹</sup> [۳۵] نخستین بار در سال ۱۹۷۳ ارائه گردید که با یک رابطه تک معادله ای رفتار بتن را در ناحیه صعودی و نزولی به صورت سهموی پیش‌بینی می‌کند. از مزایای این مدل دقت بالا در پیش‌بینی رفتار بتن در دامنه مقاومت‌های گسترده می‌باشد که به همین علت به کارگیری آن در بسیاری از نرم‌افزارهای المان محدود مورد توجه قرار گرفته است. رابطه ارائه شده به صورت رابطه (۵) می‌باشد که در آن پارامتر شکل منحنی است که با استفاده از داده‌های آزمایشگاهی جهت تطبیق با منحنی واقعی تجربی کالیبره می‌شود.

$$\sigma = f'_c \frac{n \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)}{(n-1) + \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^n} \quad (5)$$

### ۳-۶- مدل رفتاری تورنفلد

مدل رفتاری تورنفلد<sup>۲۰</sup> [۳۶] در سال ۱۹۸۷ با اصلاح ناحیه نزولی مدل پاپوویکس و افزودن پارامتر  $k$  که کنترل کننده شیب نمودار در ناحیه نزولی است برای طیف گسترده‌ای از بتن‌ها در مقاومت‌های گوناگون مورد استفاده قرار می‌گیرد. این مدل با تابعی غیرخطی، رفتار بتن را هم در ناحیه صعودی (تا رسیدن به تنش نهایی) و هم در ناحیه نزولی (پس از نقطه اوج) به‌طور جامع مدل‌سازی می‌کند. رابطه ارائه شده به صورت رابطه (۶) خواهد بود. که در آن  $n$  و  $k$  پارامترهای شکل منحنی است که با استفاده از داده‌های آزمایشگاهی جهت تطبیق با منحنی واقعی تجربی کالیبره می‌شوند.

$$\sigma = \begin{cases} \frac{f'_c n \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)}{(n-1) + \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^n} & \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ \frac{f'_c n \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)}{(n-1) + \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{nk}} & \varepsilon_0 < \varepsilon \leq \varepsilon_{cu} \end{cases} \quad (6)$$

### ۳-۷- مدل رفتاری هاجیمه

مدل رفتاری هاجیمه<sup>۲۱</sup> عمدتاً در ژاپن مورد استفاده قرار گرفته است و رابطه آن به صورت رابطه (۷) است [۱۹].

$$\sigma = 6.75 f'_c \left( e^{\frac{-0.812\varepsilon}{\varepsilon_0}} - e^{\frac{-1.22\varepsilon}{\varepsilon_0}} \right) \quad (7)$$

<sup>19</sup> Popovics constitutive model

<sup>20</sup> Thorenfeldt constitutive model

<sup>21</sup> Hajime constitutive model

### ۳-۸- مدل یورو کد ۲

این مدل نخستین بار در [۳۷] cfip model code 1990-1993 مورد استفاده قرار گرفت. سپس در یورو کد ۲ [۳۰] نیز به کار گرفته شد. رابطه آن به صورت رابطه (۸) می باشد.

$$\sigma = f'_c \frac{\left(1.05 \frac{E}{E_s}\right) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2}{1 + \left(\left(1.05 \frac{E}{E_s}\right) - 2\right) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)} \quad (8)$$

### ۳-۹- مدل ترکیبی پاپوویکس-گو

با بررسی دقت پیش‌بینی منحنی تنش کرنش مدل‌های گوناگون در این پژوهش با تطبیق نتایج آزمایشگاهی یافت شد که بهترین حالت برای پیش‌بینی رفتار بتن مقاومت بالا لاستیکی با مقادیر بالا به کارگیری یک مدل ترکیبی است که در این پژوهش مدل ترکیبی پاپوویکس - گو<sup>۲۲</sup> ارائه گردید.

برای شاخه صعودی<sup>۲۳</sup> (تا نقطه تنش ماکسیمم) از رابطه پاپوویکس [۳۵] که توضیحات آن داده شده است استفاده گردید. برای شاخه نزولی<sup>۲۴</sup> نیز کسر گوئیای ناسره اصلاح شده توسط گو<sup>۲۵</sup> [۲۰] که در استانداردهای چینی [۳۸] برای پیش‌بینی بخش نزولی منحنی‌های تنش-کرنش فشاری بتن معمولی و همچنین بتن با انواع سنگدانه‌های مختلف، مانند سنگدانه‌های بازیافتی و لاستیکی نیز استفاده می‌گردد، به کار گرفته شد [۱۶،۱۹،۳۹]. بنابراین، برای شاخه نزولی از مدل گو استفاده گردید که دقت مناسبی در پیش‌بینی رفتار بتن لاستیکی مقاومت بالا در شاخه نزولی آن دارد. که رابطه نهایی استفاده شده در این مدل ترکیبی به صورت رابطه (۹) ارایه می‌گردد.

$$\sigma = \begin{cases} \frac{f'_c n \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)}{(n-1) + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^n} & \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ \frac{f'_c \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)}{\alpha \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)} & \varepsilon_0 < \varepsilon \leq \varepsilon_{cu} \end{cases} \quad (9)$$

که در آن n و پارامترهای شکل منحنی است که با استفاده از داده‌های آزمایشگاهی جهت تطبیق با منحنی واقعی تجربی کالیبره می‌شوند.

<sup>22</sup> Popovics-Guo Hybrid Model

<sup>23</sup> Ascending branch

<sup>24</sup> Descending branch

<sup>25</sup> Guo

#### ۴- روش‌های تعیین خطا

روش‌های گوناگونی برای تعیین خطای هریک از مدل‌ها در مقایسه با نتایج آزمایشگاهی به‌منظور مشخص نمودن دقت هر مدل رفتاری جهت استفاده برای این نوع بتن لاستیکی با مقادیر بالا و پر مقاومت وجود دارد که در این پژوهش از سه روش  $RMSE$ ،  $R^2$  و  $MAE$  استفاده گردید.

#### ۴-۱ ریشه میانگین مربعات خطا

ریشه میانگین مربعات خطا ( $RMSE$ )<sup>۲۶</sup> یکی از رایج‌ترین معیارهای سنجش دقت مدل‌های عددی در مقایسه با داده‌های تجربی است. این معیار نشان می‌دهد که مدل تا چه حد توانسته مقادیر واقعی را پیش‌بینی کند و چقدر از آن‌ها فاصله دارد. این روش به دلیل استفاده از توان دوم اختلاف‌ها، خطاهای بزرگ وزن بیشتری می‌گیرند. به همین دلیل،  $RMSE$  در بررسی مدل‌هایی که در برخی نقاط اختلاف زیادی با داده‌های آزمایشگاهی دارند، بسیار مفید است. در مهندسی عمران و تحلیل رفتار بتن،  $RMSE$  معمولاً برای بررسی میزان تطابق منحنی‌های تنش - کرنش تجربی با نتایج آزمایشگاهی استفاده می‌شود. در شرایطی مانند ناحیه نرم‌شدگی بتن<sup>۲۷</sup> که دقت پیش‌بینی مدل اهمیت ویژه‌ای دارد،  $RMSE$  می‌تواند به ارزیابی بهتر مدل کمک کند. ریشه میانگین مربعات خطا از رابطه زیر به دست می‌آید که هرچه این مقدار به صفر نزدیک‌تر باشد دقت مدل در پیش‌بینی رفتار بتن بالاتر است.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma_m - \sigma_{exp})^2} \quad (10)$$

که در آن:

$n$ : تعداد نمونه‌ها       $\sigma_m$ : مقدار تنش پیش‌بینی شده توسط مدل       $\sigma_{exp}$ : مقدار تنش تجربی

#### ۴-۲ ضریب $R^2$

ضریب  $R^2$  نشان‌دهنده توانایی مدل در توضیح تغییرپذیری داده‌های تجربی است. به طوری که اگر عدد به دست آمده از رابطه زیر به ۱ نزدیک باشد به معنای تطابق بیشتر و دقت بالاتر مدل در پیش‌بینی رفتار بتن را دارد و اگر این مقدار به صفر نزدیک باشد نشانگر دقت پایین مدل رفتاری است.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (\sigma_{exp} - \sigma_m)^2}{\sum (\sigma_{exp} - \bar{\sigma}_{exp})^2} \quad (11)$$

که در آن:

$n$ : تعداد نمونه‌ها       $\sigma_m$ : مقدار تنش پیش‌بینی شده توسط مدل       $\sigma_{exp}$ : مقدار تنش تجربی       $\bar{\sigma}_{exp}$ : میانگین مقدار تنش تجربی

<sup>26</sup> Root Mean Square Error

<sup>27</sup> post-peak softening

#### ۴-۳- میانگین خطای مطلق

میانگین خطای مطلق ( $MAE^{28}$ ) میانگین قدرمطلق اختلاف بین مقادیر پیش‌بینی شده مدل و داده‌های آزمایشگاهی را محاسبه می‌کند. بر خلاف RMSE، به مقدار خطاهای بزرگ حساسیت کمتری دارد و به‌صورت یکنواخت، میانگین تمامی خطاها را محاسبه می‌کند و برای تحلیل مدل‌هایی که خطای کوچک اما سیستماتیک دارند بهتر عمل می‌کند. به‌عنوان مثال، مناسب برای ارزیابی دقت مدل‌های تنش - کرنش در ناحیه الاستیک بتن است که دقت کرنش‌های کوچک اهمیت دارد و از رابطه زیر محاسبه می‌گردد و هرچه مقدار آن به صفر نزدیک‌تر باشد نشان‌دهنده این است که دقت مدل، بالاتر است و با منحنی آزمایشگاهی تطابق دارد.

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\sigma_m - \sigma_{exp}| \quad (12)$$

که در آن:

$n$ : تعداد نمونه‌ها       $\sigma_m$ : مقدار تنش پیش‌بینی شده توسط مدل       $\sigma_{exp}$ : مقدار تنش تجربی

#### ۵- ارزیابی نتایج

در این بخش، نتایج آزمایشگاهی استخراج‌شده از نمونه‌های استوانه‌ای بتن لاستیکی با جایگزینی مقادیر مختلف لاستیک ارائه شده است. میانگین نتایج به‌دست‌آمده در نمودارهای هر قسمت جهت مقایسه با مقادیر پیش‌بینی شده توسط مدل‌های رفتاری مختلف قرار گرفته است. در مدل‌سازی این مطالعه از هفت مدل رفتاری موجود شامل (هاگنستاد، سائنز، کنت - پارک، پاپوویکس، تورنفلد، حاجیمه و یوروکد ۲) استفاده گردیده و در نهایت مدل پیشنهادی ترکیبی «پاپوویکس - گو» نیز به‌عنوان مرجع مقایسه پیشنهاد و ارائه شده است و در نهایت با سه روش (ریشه میانگین مربعات خطا)، (میانگین خطای مطلق) و (ضریب  $R^2$ ) دقت مدل‌ها ارزیابی شد.

#### ۵-۱- بتن حاوی صفر درصد لاستیک جایگزین حجمی ریزدانه

۱. پارامترهای شکل منحنی در مدل‌های پاپوویکس، تورنفلد و پاپوویکسگو از طریق فرایند کالیبراسیون با دقت بسیار بالا تنظیم شده‌اند تا تطابق دقیقی با نتایج آزمایشگاهی حاصل گردد (جدول ۴).
۲. بر اساس ارزیابی خطاهای به‌دست‌آمده در پیش‌بینی کل منحنی (شامل هر دو شاخه صعودی و نزولی) که در جدول (۵) ارائه شده است، مدل تورنفلد در توصیف رفتار بتن مرجع (۰ درصد لاستیک) دقت بالاتری نشان داد، مدل پیشنهادی پاپوویکسگو نیز با خطای بسیار کم توانسته است رفتار کل منحنی تنش-کرنش بتن را به‌خوبی پیش‌بینی کند.
۳. در بخش صعودی منحنی، مدل پاپوویکسگو با بهره‌گیری از رابطه‌ای مشابه با مدل‌های پاپوویکس و تورنفلد و با تنظیم دقیق پارامتر شکل (n) به تطبیقی تقریباً صد درصدی با نتایج آزمایشگاهی دست یافت.
۴. در بخش نزولی منحنی، هر دو مدل پاپوویکسگو و تورنفلد دقت بسیار بالایی نشان دادند و شیب تند این بخش با توجه به مقاومت بالای بتن مرجع با استفاده از پارامترهای کنترل‌کننده ( $\alpha$ ) و ( $k$ ) به‌خوبی پوشش داده شد.
۵. مدل کنتپارک نیز با دقت نسبتاً مناسبی شیب ناحیه نزولی را پیش‌بینی کرد، در حالی که مدل پاپوویکس به علت عدم وجود پارامتر کنترل‌کننده شیب ناحیه نزولی در قسمت پس از تنش ماکسیمم با خطای قابل‌توجهی مواجه شد.

<sup>28</sup> Mean Absolute Error

۶. به‌طور کلی، مدل‌های پیشنهادی پاپوویکسگو و تورنفلد با ارائه دقت و هم‌پوشانی مناسب در پیش‌بینی رفتار بتن مرجع (۰ درصد لاستیک) ابزارهای بسیار مناسبی برای مدل‌سازی رفتار غیرخطی این نوع بتن محسوب می‌شوند.

### ۵-۲- بتن حاوی ۲۰ درصد لاستیک جایگزین حجمی ریزدانه

۱. پارامترهای شکل منحنی در مدل‌های پاپوویکس، تورنفلد و پاپوویکسگو از طریق فرایند کالیبراسیون به‌گونه‌ای تنظیم شده‌اند که تطابق بسیار دقیقی با نتایج آزمایشگاهی حاصل گردد (جدول ۴).

۲. با توجه به مقاومت فشاری تقریبی ۶۳ مگاپاسکال، مدل‌های کلاسیک نظیر هاگنستاد، سائنز، کنتتپارک و هاجیمه در پیش‌بینی رفتار بتن با محدودیت‌های قابل توجهی مواجه می‌شوند. همچنین وجود لاستیک در بتن موجب تغییر رفتار بتن‌های متداول شده و محدودیت‌های مذکور را تشدید می‌کند.

۳. بر اساس ارزیابی دقیق خطاهای به‌دست‌آمده (جدول ۵) در پیش‌بینی کل منحنی (شامل هر دو شاخه صعودی و نزولی)، مشخص گردیده است که مدل پیشنهادی پاپوویکسگو دقت بالاتری در توصیف رفتار بتن حاوی ۲۰ درصد لاستیک از خود نشان می‌دهد؛ همچنین، مدل تورنفلد و مدل پاپوویکس نیز عملکرد قابل‌قبولی در پیش‌بینی رفتار در مجموع داشته‌اند.

۴. در بخش صعودی منحنی، مدل پاپوویکسگو با بهره‌گیری از رابطه‌ای مشابه با مدل‌های پاپوویکس و تورنفلد و با تنظیم دقیق پارامترهای شکل (n)، توانسته است تطبیق بسیار خوبی با نتایج آزمایشگاهی داشته باشد.

۵. در بخش نزولی منحنی، مدل پاپوویکسگو دقت بسیار بالاتری نسبت به سایر مدل‌ها نشان داده و شیب تند که عمدتاً در بتن‌های مقاومت بالا مشاهده می‌شود با کمک پارامتر کنترل‌کننده ( $\alpha$ ) به‌خوبی پوشش داده است. افزون بر این، مدل تورنفلد به علت وجود پارامتر (k) که کنترل‌کننده شیب ناحیه نزولی است، عملکرد بهتری نسبت به مدل پاپوویکس در این شاخه از منحنی از خود به نمایش گذاشته است.

۶. به‌طور کلی، مدل پیشنهادی پاپوویکسگو با ارائه دقت و هم‌پوشانی مناسب در پیش‌بینی رفتار بتن لاستیکی حاوی ۲۰ درصد لاستیک، ابزاری بسیار مناسب جهت مدل‌سازی رفتار غیرخطی این نوع بتن محسوب می‌شود.

### ۵-۳- بتن حاوی ۴۰ درصد لاستیک جایگزین حجمی ریزدانه

۱. پارامترهای شکل منحنی در مدل‌های پاپوویکس، تورنفلد و پاپوویکسگو از طریق فرایند کالیبراسیون به‌گونه‌ای تنظیم شده‌اند که تطابق دقیقی با نتایج آزمایشگاهی حاصل گردد (جدول ۴).

۲. بر اساس ارزیابی خطاهای به‌دست‌آمده (جدول ۵) در پیش‌بینی کل منحنی (شامل هر دو شاخه صعودی و نزولی)، مشخص گردیده است که مدل پیشنهادی پاپوویکسگو دقت بالاتری در توصیف رفتار بتن حاوی ۴۰ درصد لاستیک دارد؛ همچنین، مدل تورنفلد نیز عملکرد بسیار خوبی در پیش‌بینی رفتار داشته است.

۳. در بخش صعودی منحنی، به دلیل تأثیر قابل‌ملاحظه مقادیر لاستیک که باعث کاهش مدول الاستیسیته نسبت به بتن‌های معمول می‌شود، مشاهده شد که مدل‌های دیگر که فاقد پارامترهای کالیبراسیون مناسب برای بتن‌های لاستیکی هستند، معمولاً مدول الاستیسیته‌ای بیش از حد برای بتن پیش‌بینی می‌کنند و سختی بیشتری را نشان می‌دهند؛ این موضوع منجر به عدم هم‌پوشانی کافی با نتایج تجربی گردیده است.

۴. مدل پاپوویکسگو که از رابطه‌ای مشابه با مدل‌های پاپوویکس و تورنفلد در بخش صعودی بهره می‌برد، با تنظیم دقیق پارامترهای

شکل، توانسته تطبیق بسیار خوبی با نتایج آزمایشگاهی داشته باشد.

۵. در بخش نزولی منحنی، مدل پاپوویکسگو دقت بسیار بالاتری نسبت به سایر مدل‌ها از خود نشان داده و شیب تند، به دلیل مقاومت بالای بتن و ویژگی نرم‌تر رفتار نسبت به بتن‌های متداول، به خوبی پوشش داده شده است. افزون بر این، مدل تورنفلد نیز در بخش نزولی، به علت وجود پارامتر  $k$  که کنترل‌کننده شیب ناحیه نزولی است، عملکرد قابل‌قبولی داشته است.

۶. به‌طورکلی، مدل پیشنهادی پاپوویکسگو در پیش‌بینی رفتار بتن لاستیکی با ۴۰ درصد لاستیک، با ارائه دقت و هم‌پوشانی مناسب، نتایج رضایت‌بخشی را به نمایش گذاشته است.

#### ۵-۴- بتن حاوی ۶۰ درصد لاستیک جایگزین حجمی ریزدانه

۱. پارامترهای شکل منحنی در مدل‌های پاپوویکس، تورنفلد و پاپوویکسگو، به‌منظور تطبیق دقیق با نتایج آزمایشگاهی، از طریق فرایند کالیبراسیون تنظیم شده و به تفکیک در جدول (۴) آورده شده‌اند.

۲. با استناد به نتایج خطاهای به‌دست‌آمده در پیش‌بینی کل منحنی (شامل هر دو شاخه صعودی و نزولی) (جدول ۵)، مشخص گردید که مدل پیشنهادی پاپوویکسگو دارای بیشترین دقت در بازنمایی رفتار بتن حاوی ۶۰ درصد لاستیک است.

۳. در شاخه صعودی منحنی، به علت وجود مقادیر بالای لاستیک که موجب کاهش مدول الاستیسیته می‌شود، سایر مدل‌ها نظیر هاگنستاد معمولاً مدول الاستیسیته را بیش از حد برای بتن پیش‌بینی کرده و سختی بیشتری نشان می‌دهند که منجر به عدم هم‌پوشانی مناسب با نتایج تجربی می‌شود.

۴. در مقابل، مدل پاپوویکسگو که از رابطه‌ای مشابه با مدل‌های پاپوویکس و تورنفلد در شاخه صعودی بهره می‌برد، با تنظیم دقیق پارامتر شکل (11)، تطبیق بسیار خوبی با نتایج آزمایشگاهی از خود نشان داد.

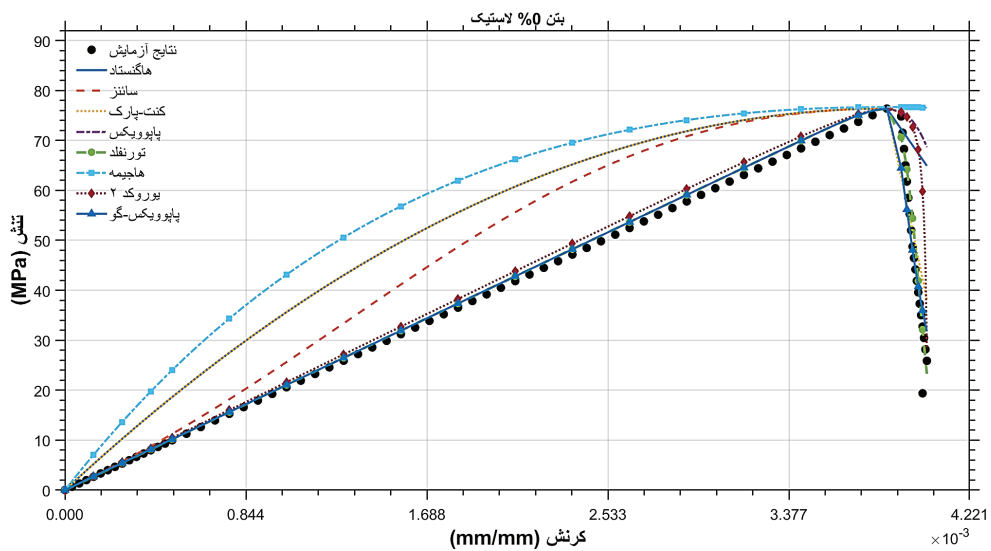
۵. در شاخه نزولی منحنی، مدل هاگنستاد به دلیل پوشش‌دهی رفتار نرم بتن لاستیکی ناشی از مقادیر بالای لاستیک، علی‌رغم مقاومت فشاری بالا، بیشترین دقت را داشته و عملکرد مناسبی ارائه نمود، با این حال، حتی در شاخه نزولی، مدل پیشنهادی پاپوویکسگو نیز دقت قابل‌قبولی در پیش‌بینی رفتار بتن نشان داد.

۶. در مجموع، مدل پاپوویکس با ارائه بیشترین هم‌پوشانی و دقت در مدل‌سازی بتن حاوی مقادیر بالای لاستیک و مقاومت فشاری بالا، نتایج قابل‌قبولی ارائه نموده است.

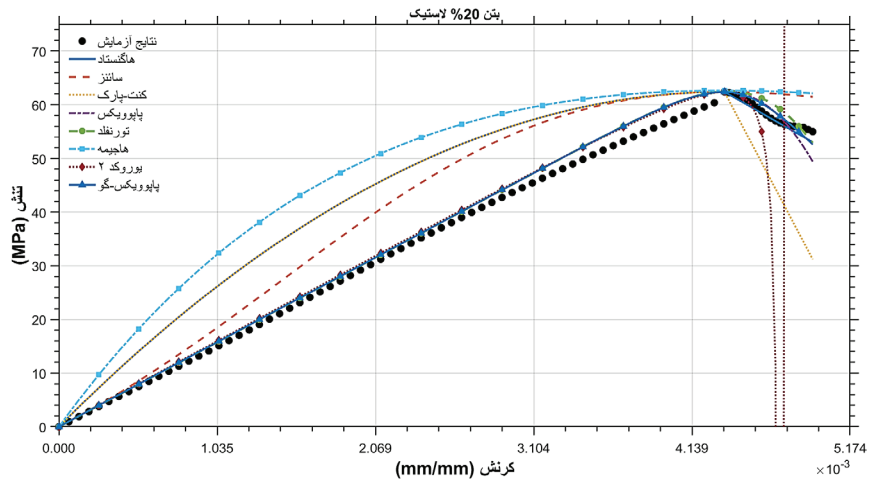
جدول ۴: پارامترهای بهینه تجربی مدل‌های رفتاری پاپوویکس، تورنفلد و پاپوویکس-گو با تطبیق بر منحنی آزمایشگاهی

مقدار	پارامتر تجربی		مدل	
۴۵	n		مدل پاپوویکس	بتن مرجع (۰ درصد لاستیک)
۴۵	۲,۲	n	مدل تورنفلد	
۴۵	۶۲۰	n	مدل پاپوویکس - گو	
۱۷	n		مدل پاپوویکس	بتن ۲۰ درصد لاستیک
۱۷	۰/۹	n	مدل تورنفلد	
۱۷	۱۲	n	مدل پاپوویکس - گو	
۹	n		مدل پاپوویکس	بتن ۴۰ درصد لاستیک
۹	۱/۰۵	n	مدل تورنفلد	
۹	۷	n	مدل پاپوویکس - گو	
۴/۵	n		مدل پاپوویکس	بتن ۶۰ درصد لاستیک
۴/۵	۰/۷۵	n	مدل تورنفلد	
۴/۵	۰/۲۵	n	مدل پاپوویکس - گو	

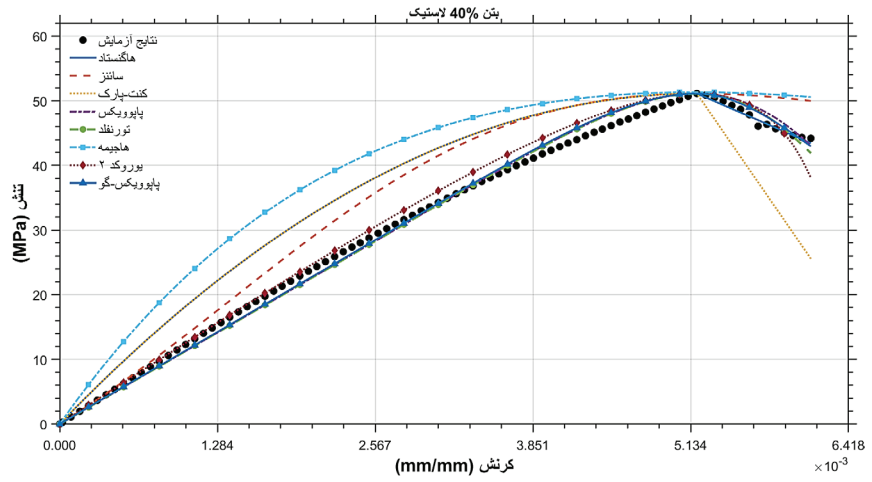
(الف)



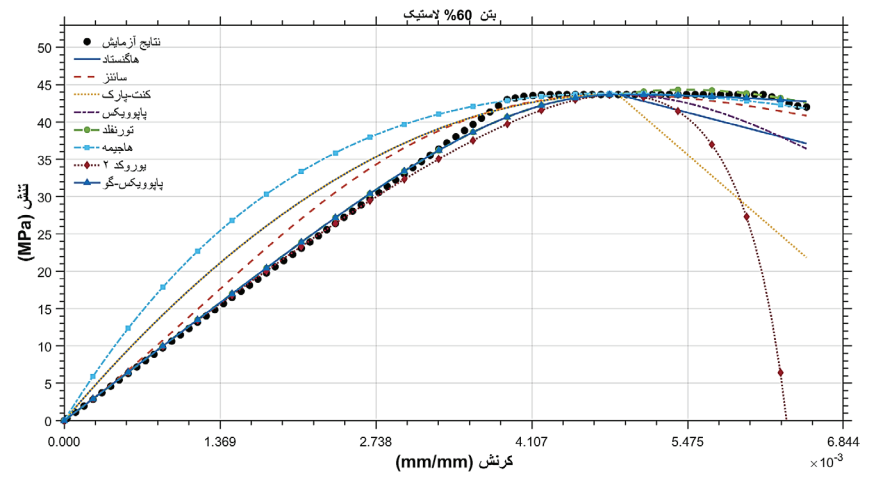
(ب)



(ج)



(د)



شکل ۵) منحنی‌های تنش- کرنش آزمایشگاهی و پیش‌بینی مدل‌های رفتاری عددی در نمونه‌های حاوی لاستیک با درصد‌های مختلف: (الف) بتن مرجع ۰٪ لاستیک، (ب) ۲۰٪ لاستیک، (ج) ۴۰٪ لاستیک، (د) ۶۰٪ لاستیک

جدول ۵: تحلیل خطای مدل های رفتاری عددی برای بتن با مقادیر بالای لاستیک: مقایسه  $R^2$ , RMSE, MAE و برای منحنی کامل و شاخه های صعودی و نزولی در با مقادیر مختلف لاستیک (۰٪، ۲۰٪، ۴۰٪، ۶۰٪)

بتن ۰ درصد لاستیک								
خطای شاخه نزولی		خطای شاخه صعودی		خطای کل (منحنی کامل)				
MAE (MPa)	RMSE (MPa)	MAE (MPa)	RMSE (MPa)	MAE (MPa)	$R^2$	RMSE (MPa)	مدل	
۲۰/۹۶	-۲۸۳/۱	۲۴/۹۲	۱۱/۵۶	۰/۶۹۴	۱۳/۰۷	۱۳/۸۰	۰/۴۷۱	هاگنستاد
۲۸/۱۱	-۲/۹۰۰	۳۲/۵۶	۶/۹۲	۰/۸۶۲	۸/۷۶	۱۱/۹۷	۰/۴۰۸	سائنز
۷/۸۸	۰/۶۸۴	۹/۲۶	۱۱/۵۶	۰/۶۹۴	۱۳/۰۷	۱۰/۶۸	۰/۷۱۴	کنت - پارک
۲۴/۸۴	-۲/۰۳۲	۲۸/۷۱	۰/۷۲	۰/۹۹۹	۰/۸۸	۶/۴۸	۰/۶۲۵	پاپوویکس
۳/۳۰	۰/۹۳۴	۴/۲۲	۰/۷۲	۰/۹۹۹	۰/۸۸	۱/۳۴	۰/۹۹۱	تورنفلد
۲۸/۴۵	-۲/۹۷۴	۸۷۳۲	۱۵/۶۶	۰/۴۴۵	۱۷/۶۰	۱۸/۷۱	۰/۰۶۱	هاجیمه
۱۸/۶۸	-۰/۷۱۶	۲۱/۶۰	۱/۳۷	۰/۹۹۵	۱/۶۲	۵/۵۰	۰/۷۸۵	یوروکد ۲
۴/۸۲	۰/۸۵۳	۶/۳۳	۰/۷۲	۰/۹۹۹	۰/۸۸	۱/۷۰	۰/۹۸۱	پاپوویکس - گو
بتن ۲۰ درصد لاستیک								
۰/۶۹	۰/۸۷۶	۰/۹۲	۹/۷۹	۰/۶۶۰	۱۰/۷۰	۷/۶۲	۰/۷۷۶	هاگنستاد
۳/۴۵	-۱/۵۵۰	۴/۱۷	۶/۱۸	۰/۸۴۵	۷/۲۲	۵/۵۳	۰/۸۸۸	سائنز
۱۱/۰۹	-۲۴/۷۲۶	۱۳/۲۶	۹/۷۹	۰/۶۶۰	۱۰/۷۰	۱۰/۱۰	۰/۶۷۰	کنت - پارک
۱/۴۸	۰/۳۶۹	۲/۰۸	۱/۲۷	۰/۹۹۳	۱/۵۴	۱/۳۲	۰/۹۹۳	پاپوویکس
۱/۴۰	۰/۵۷۷	۱/۷۰	۱/۲۷	۰/۹۹۳	۱/۵۴	۱/۳۰	۰/۹۹۴	تورنفلد
۳/۸۴	-۲/۰۵۰	۴/۵۶	۱۳/۲۴	۰/۳۷۲	۱۴/۵۴	۱۱/۰۰	۰/۵۷۵	هاجیمه
۴۶/۶۰	-۲۳۹۵/۲۹	۱۲۷/۹۵	۱/۳۸	۰/۹۹۳	۱/۵۷	۱۲/۱۷	-۹/۰۰	یوروکد ۲
۰/۹۶	۰/۷۹۶	۱/۱۸	۱/۲۷	۰/۹۹۳	۱/۵۴	۱/۱۹	۰/۹۹۵	پاپوویکس - گو
بتن ۴۰ درصد لاستیک								
۳/۱۷	-۴۵/۹۰۲	۳/۵۴	۳/۲۶	۰/۹۲۳	۴/۰۰	۳/۲۴	۰/۹۳۰	هاگنستاد
۰/۸۵	-۲/۹۹۹	۱/۰۳	۱/۸۲	۰/۹۷۳	۲/۳۷	۱/۵۸	۰/۹۷۹	سائنز
۱۱/۱۴	-۵۹۶/۳۵۷	۱۲/۶۳	۳/۲۶	۰/۹۲۳	۴/۰۰	۵/۲۳	۰/۷۵۹	کنت - پارک
۲/۵۱	-۳۶/۰۸۱	۳/۱۵	۰/۶۰	۰/۹۹۷	۰/۸۱	۱/۰۸	۰/۹۸۶	پاپوویکس
۰/۴۲	۰/۱۷۹	۰/۴۷	۰/۶۰	۰/۹۹۷	۰/۸۱	۰/۵۶	۰/۹۹۷	تورنفلد
۰/۳۹	۰/۰۱۲	۰/۵۱	۵/۴۶	۰/۷۸۱	۶/۷۷	۴/۱۹	۰/۸۴۰	هاجیمه
۱۶/۳۱	-۲۴۶۱/۳۳	۲۵/۶۴	۰/۷۴	۰/۹۹۴	۱/۱۵	۴/۶۳	۰/۲۳۲	یوروکد ۲
۰/۲۷	۰/۵۲۹	۰/۳۵	۰/۶۰	۰/۹۹۷	۰/۸۱	۰/۵۲	۰/۹۹۸	پاپوویکس - گو
بتن ۶۰ درصد لاستیک								
۰/۳۹	۰/۹۵۹	۰/۴۷	۵/۷۹	۰/۸۲۵	۶/۴۰	۵/۰۰	۰/۸۵۸	هاگنستاد
۳/۴۹	-۱/۹۵۴	۴/۰۲	۳/۸۹	۰/۹۰۷	۴/۶۶	۳/۸۳	۰/۹۱۵	سائنز
۹/۸۰	-۲۱/۱۸۸	۱۱/۰۳	۵/۷۹	۰/۸۲۵	۶/۴۰	۶/۳۹	۰/۷۸۶	کنت - پارک
۱/۱۶	۰/۶۶۱	۱/۳۶	۰/۹۵	۰/۹۹۵	۱/۰۸	۰/۹۸	۰/۹۹۵	پاپوویکس
۱/۰۰	۰/۷۳۶	۱/۲۰	۰/۹۵	۰/۹۹۵	۱/۰۸	۰/۹۵	۰/۹۹۵	تورنفلد
۳/۸۵	-۲/۵۲۳	۴/۳۹	۸/۵۹	۰/۶۱۰	۹/۵۵	۷/۸۹	۰/۶۷۳	هاجیمه
۱/۶۲	۰/۰۷۸	۲/۲۵	۱/۱۸	۰/۹۹۱	۱/۴۸	۱/۲۴	۰/۹۸۹	یوروکد ۲
۰/۸۵	۰/۸۲۰	۰/۹۹	۰/۹۳	۰/۹۹۵	۱/۰۸	۰/۹۲	۰/۹۹۵	پاپوویکس - گو

## ۶- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این پژوهش، با استفاده از داده‌های تجربی به‌دست‌آمده از بتن‌های مرجع (صفر درصد لاستیک) و بتن‌های حاوی ۲۰، ۴۰ و ۶۰ درصد لاستیک، عملکرد هفت مدل رفتاری متداول (هاگنستاد، سائز، کنت-پارک، پاپوویکس، تورنفلد، هاجیمه و یوروکد ۲) در پیش‌بینی منحنی تنش-کرنش بتن لاستیکی مورد ارزیابی قرار گرفت و در نهایت مدل ترکیبی پاپوویکس-گو پیشنهاد شد. نتایج نشان می‌دهد که افزایش درصد لاستیک، علاوه بر ایجاد تغییرات قابل‌توجه در مدول الاستیسیته و مقاومت فشاری نهایی و افزایش رفتار غیرخطی و نرم‌تر بتن به‌خصوص در شاخه نزولی منحنی، باعث بروز محدودیت‌هایی در عملکرد مدل‌های کلاسیک می‌شود. به‌ویژه در نمونه‌های حاوی ۲۰، ۴۰ و ۶۰ درصد لاستیک، خطاهای پیش‌بینی مدل‌های متداول کلاسیک در بخش‌های مختلف منحنی (شامل هر دو شاخه صعودی و نزولی) به‌طور قابل‌توجهی افزایش یافته و تطابق آن‌ها با داده‌های تجربی کاهش یافته است. برای بتن مرجع (صفر درصد لاستیک) با مقاومت فشاری حدود ۷۵ مگاپاسکال، مدل‌های تورنفلد و پاپوویکس-گو بهترین عملکرد را داشتند و به‌طور دقیق رفتار کل منحنی تنش-کرنش بتن را نشان دادند. در نمونه‌های حاوی ۲۰٪ لاستیک، تغییرات رفتاری ناشی از حضور لاستیک به‌گونه‌ای پیچیده‌تر گردید که مدل‌های کلاسیک با خطاهای قابل‌توجهی مواجه شدند؛ در مقابل، مدل پاپوویکس-گو با تنظیم دقیق پارامترهای شکل منحنی توانست عملکرد بسیار خوبی ارائه دهد.

در بتن ۴۰ درصد لاستیک، با اعمال ضرایب مناسب پارامتر شکل (n) در مدل پاپوویکس-گو، تطبیقی تقریباً صد درصدی با نتایج آزمایشگاهی در شاخه صعودی حاصل گردید. در این حالت، بخش نزولی منحنی با استفاده از پارامترهای کنترل‌کننده  $\alpha$  و  $k$  به دقت پیش‌بینی شد و هر دو مدل پاپوویکس-گو و تورنفلد نسبت به سایر مدل‌ها عملکرد بهتری نشان دادند و از دقت بالایی برخوردار بودند. در نمونه‌های حاوی ۶۰ درصد لاستیک، افزایش درصد لاستیک منجر به تغییرات شدید در رفتار بتن و کاهش مدول الاستیسیته و هم‌چنین کاهش شیب بخش نزولی گردید؛ به همین دلیل، مدل‌های کلاسیک به دلیل عدم توانایی در پوشش دقیق این تغییرات، با خطاهای قابل‌توجهی مواجه شدند. در این شرایط، مدل ترکیبی پاپوویکس-گو با ارائه دقت بالا و هم‌پوشانی مناسب با داده‌های تجربی، به عنوان یک ابزار مطمئن در پیش‌بینی رفتار بتن‌های حاوی مقادیر بالای لاستیک شناخته شد. معیارهای آماری مورد استفاده (از جمله  $RMSE$ ،  $R^2$  و  $MAE$ ) نشان می‌دهد که مدل پاپوویکس-گو در تمامی درصد‌های لاستیک (۰، ۲۰، ۴۰ و ۶۰) دارای  $R^2$  بیش از ۰/۹۸ بوده و خطای پیش‌بینی آن به‌طور قابل‌توجهی کمتر از سایر مدل‌ها است.

در مجموع، یافته‌های این پژوهش نشان می‌دهد که با افزایش درصد لاستیک در بتن، نیاز به استفاده از مدل‌های رفتاری ترکیبی و کالیبره شده برای توصیف دقیق رفتار غیرخطی بتن اجتناب‌ناپذیر می‌شود. مدل پاپوویکس-گو به‌عنوان یک راهکار جامع و بهینه، در تمامی سطوح درصد لاستیک عملکرد قابل‌اعتمادی از خود نشان داده و می‌تواند به‌عنوان ابزاری پیشرفته در تحلیل و طراحی سازه‌های بتن‌آرمه بتن لاستیکی با مقاومت فشاری بالا مورد استفاده قرار گیرد. علاوه بر این، نتایج حاصل راهنمایی‌های کاربردی برای انتخاب مدل‌های مناسب بر اساس درصد لاستیک موجود در بتن و شناسایی نقاط ضعف و شکاف‌های تحقیقاتی جهت توسعه مدل‌های آتی را فراهم می‌کند. این دستاوردها می‌تواند مبنایی برای رویکردهای نوین در مدل‌سازی رفتار بتن‌های لاستیکی و بهبود عملکرد سازه‌های پیشرفته و پیچیده باشد.

## ۷- تشکر و قدردانی

برنامه مطالعه آزمایشگاهی این پژوهش در شرکت امین بتن قرن انجام شده است و نگارندگان کمال تشکر و قدردانی را از مدیریت شرکت و کارشناسان مسئول آن را دارند.

- [1] Barbhuiya S. Crumb rubber as an eco-friendly aggregate in sustainable concrete: properties, integration, and future perspectives. *Recent Developments and Innovations in the Sustainable Production of Concrete*, Elsevier; 2025, p. 257–331. <https://doi.org/10.1016/B978-0-443-23895-6.00011-X>.
- [2] Liu L. Performance analysis and engineering application of waste rubber crumbs in concrete. *Mater Res Express* 2024;11:125501. <https://doi.org/10.1088/2053-1591/ad988f>.
- [3] Shi J, Shen J. Engineering properties and sustainability assessment of UHPFRC incorporating recycled tyre steel and polymer fibers as substitutes for manufactured fibers. *Constr Build Mater* 2025;468:140440. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2025.140440>.
- [4] Singh P, Singh DN, Singh A. Interfacial transition zone in rubberized concrete: A panacea for the extreme environmental conditions. *Constr Build Mater* 2025;469:140477. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2025.140477>.
- [5] Shaokang W, Junwen Z, Youlin X, Zhixiang S, Yang Z, Xukai D, et al. Study on mechanical properties and application of cement-based materials with different properties under impact load. *Constr Build Mater* 2025;464:140227. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2025.140227>.
- [6] Ecemiş AS, Madenci E, Karalar M, Fayed S, Althaqafi E, Özkılıç YO. Bending Performance of Reinforced Concrete Beams with Rubber as Form of Fiber from Waste Tires. *Materials* 2024;17:4958. <https://doi.org/10.3390/ma17204958>.
- [7] Elbialy S, Ibrahim W, Mahmoud S, Ayash NM, Mamdouh H. Mechanical characteristics and structural performance of rubberized concrete: Experimental and analytical analysis. *Case Studies in Construction Materials* 2024;21. <https://doi.org/10.1016/j.cscm.2024.e03727>.
- [8] Gerges NN, Issa CA, Fawaz SA. Rubber concrete: Mechanical and dynamical properties. *Case Studies in Construction Materials* 2018;9. <https://doi.org/10.1016/j.cscm.2018.e00184>.
- [9] Saeed NM, Hassan HZ. An overview of fresh and mechanical properties of rubberized concrete. *Discover Civil Engineering* 2024;1. <https://doi.org/10.1007/s44290-024-00016-8>.
- [10] Ge J, Mubiana G, Gao X, Xiao Y, Du S. Research on static mechanical properties of high-performance rubber concrete. *Front Mater* 2024;11. <https://doi.org/10.3389/fmats.2024.1426979>.
- [11] Khaloo AR, Dehestani M, Rahmatabadi P. Mechanical properties of concrete containing a high volume of tire-rubber particles. *Waste Management* 2008;28:2472–82. <https://doi.org/10.1016/j.wasman.2008.01.015>.
- [12] He S, Jiang Z, Chen H, Chen Z, Ding J, Deng H, et al. Mechanical Properties, Durability, and Structural Applications of Rubber Concrete: A State-of-the-Art-Review. *Sustainability (Switzerland)* 2023;15. <https://doi.org/10.3390/su15118541>.
- [13] Zhang P, Wang X, Wang J, Zhang T. Workability and Durability of Concrete Incorporating Waste Tire Rubber: A Review. *J Renew Mater* 2023;11:745–76. <https://doi.org/10.32604/jrm.2022.022846>.
- [14] A SN. Experimental Study on Workability of Natural Aggregate Concrete Incorporated with Crumb Rubber. *Engineering and Technology Journal* 2024. <https://doi.org/10.47191/etj/v9i02.17>.
- [15] Sheraz M, Yuan Q, Alam M, Javed MF, Rehman MF, Mohamed A. Fresh and hardened properties of waste rubber tires based concrete: a state art of review. *SN Appl Sci* 2023;5. <https://doi.org/10.1007/s42452-023-05336-5>.



*Journal Proceedings* 1955;52. <https://doi.org/10.14359/11609>.

[33] Saenz LP. Discussion of Paper “Equation for Stress-Strain Curve of Concrete” by Desai, P. and Krishnan, S. *Journal of the American Concrete Institute* 1964;61:1229–35.

[34] Charles KD, Robert P. Flexural Members with Confined Concrete. *Journal of the Structural Division* 1971;97:1969–90. <https://doi.org/10.1061/JSDEAG.0002957>.

[35] Popovics S. A numerical approach to the complete stress-strain curve of concrete. *Cem Concr Res* 1973;3:583–99. [https://doi.org/10.1016/0008-8846\(73\)90096-3](https://doi.org/10.1016/0008-8846(73)90096-3).

[36] Thorenfeldt E. Mechanical Properties of High-Strength Concrete and Applications in Design. In: Holand I, editor. *Utilization of High-Strength Concrete*, Stavanger, Norway: Tapir; 1987.

[37] Comité Euro-International du Béton (CEB); Fédération Internationale de la Précontrainte (FIP). *CEB-FIP Model Code 1990*. London: Thomas Telford Services Ltd; 1993.

[38] *Code for Design of Concrete Structures (GB 50010-2010(2015))*. Beijing, China: 2015.

[39] Ouyang X, Wu Z, Shan B, Chen Q, Shi C. A critical review on compressive behavior and empirical constitutive models of concrete. *Constr Build Mater* 2022;323. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2022.126572>.