

3D Constitutive Elastoplastic Damage Fracture Modeling using Novel Potential Function

Amanlah Kordi¹, SeyedHossein Hosseini Lavassani^{2*}, Peyman Homami²

1-PhD Candidate Faculty of Engineering, Civil Engineering Department, Kharazmi University, Iran, Tehran

2-Associate Professor Faculty of Engineering, Civil Engineering Department, Kharazmi University, Iran, Tehran

Received: 02 January 2024 Revised: 09 April 2024 Accepted: 26 May 2024

Research paper

Abstract

It is very important to define a constitutive model in order to describe mechanical behaviors of concrete material under multiaxial forces. This paper proposes a novel potential function which can be used in constitutive law for a wide category of ductile and brittle and pressure-sensitive materials. This novel potential function permits the possibility of transition between most forms of existing associated yield surface of quasi-brittle materials (concrete) and ductile materials (steel). In this research, the potential function is generalized to several associated functions with failure criteria, such as Drucker-Prager, Tresca, Modified Tresca, Mohr-coulomb, Von-Mises, Rankin, and others. Also, the convexity and smoothness of plasticity surface of this function are investigated. Then a tri-axial elasto-plasto-fracture-damage constitutive law for the modeling of concrete is presented. It's determined that the constitutive model is suitable enough for three-dimensional structural applications and it seems to have a high ability to reasonably predict the response of concrete beams, walls and columns and other semi-brittle elements under cyclic loading.

Keywords: Constitutive Law; Potential Function; Elasto-Plastic-Damage-Fracture; Plastic theory; Fracture mechanics; Damage theory.

*Corresponding Author: SeyedHossein Hosseini Lavassani

Kordi, A., hosseini lavassani, S. H., Homami, P. Elasto-plastic-damage-Fracture Constitutive Model of Concrete. *Journal of Concrete Structures and Materials*, 2024; 9(1): 1-25. <http://doi.org/10.30478/jcsm.2024.453237.1369> 2538-5828/ © 2024 The Authors. Published by Iranian Concrete Society

This is an open access article under the CC BY license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

مدل سازی مشخصه و سه بعدی آسیب-شکست الاستوپلاستیک با استفاده از یک تابع پتانسیل نوین

امان الله کردی^۱، سیدحسین حسینی لواسانی^{۲*}، پیمان همای^۲

۱. دانشجوی دکتری مهندسی عمران، دانشگاه خوارزمی، ایران، تهران

۲. دانشیار دانشکده فنی مهندسی، گروه مهندسی عمران، دانشگاه خوارزمی، ایران، تهران

پست الکترونیکی نویسنده مسئول: lavasani@khu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۰/۱۲، تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۰۱/۲۱، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۳/۰۶

نوع مقاله: پژوهشی

چکیده

تعریف یک مدل مشخصه جهت تشریح رفتار مکانیکی مصالح بتنی تحت اثر نیروهای چند محوره بسیار حائز اهمیت می باشد. مقاله حاضر یک تابع پتانسیل نوین را با قابلیت استفاده در قانون مشخصه برای گروه وسیعی از مصالح شکل پذیر، ترد و حساس به فشار پیشنهاد می دهد. این تابع پتانسیل جدید احتمال تبدیل اغلب فرم های سطح تسلیم مرتبط و موجود برای مصالح نیمه ترد (بتن) و مواد شکل پذیر (فولاد) را فراهم می آورد. در این پژوهش، تابع پتانسیل به چندین تابع مرتبط با معیارهای گسیختگی همچون دراکر- پراگر، ترسکا، ترسکا اصلاح شده، موهر کولمب، فون میزس، رانکین و... تعمیم داده شده است. همچنین تحذب و صافی سطح پلاستیسیته این تابع نیز بررسی می شود. در ادامه یک قانون جایگزین آسیب- شکست الاستوپلاستیک سه محوره برای مدل سازی بتن ارائه خواهد شد. مشخص شد که مدل مشخصه به اندازه کافی برای کاربردهای سازه ای سه بعدی مناسب بوده و به نظر می رسد از توانایی بالایی برای پیش بینی منطقی پاسخ تیرها، دیوارها و ستون های بتنی و دیگر المان های نیمه ترد تحت بارگذاری های چرخه ای برخوردار است.

کلمات کلیدی: قانون مشخصه، تابع پتانسیل، آسیب- شکست الاستوپلاستیک، تئوری پلاستیسیته، مکانیک های شکست، تئوری

آسیب.

برای تشریح ریاضی پاسخ مصالح تحت تنش‌های متفاوت، لازم است رفتارهای مکانیکی مصالح بتنی به کمک یک قانون مشخصه طبقه بندی شود که تابعی را به منظور توصیف روابط میان تنش و کرنش تعریف می‌نماید. تاکنون تعدادی از قوانین مشخصه جهت مدل‌سازی رفتار مصالح نیمه ترد و بتن در بسیاری از مطالعات گذشته پیشنهاد شده است [۱-۱۳]. این مطالعات حاکی از آن است که یکی از معایب مدل‌های پیشنهاد شده، ترک موجود و متعاقباً توصیف ریاضی آن ترک است. به منظور حل این موضوع، محققان از ترکیب مکانیک‌های شکست و تئوری الاستوپلاستیک استفاده کردند که البته نتایج امیدوارکننده‌ای را در برداشته است [۱۴-۱۷]. ضعف اصلی این مطالعات آن است که برخلاف رفتار قابل قبول در برابر فشار، در پیش بینی رفتار در برابر کشش ضعیف هستند. به عبارت دیگر مدل‌های پلاستیسیته قادر به تعیین نزول سختی مورد انتظار در آزمایشات نیستند [۱۸]. حتی اگر مکانیک‌های شکست برای توصیف رفتار ترک مفید باشند، جهت توصیف تغییرشکل پلاستیک ایجاد شده در نتایج تجربی عملکرد ضعیفی خواهند داشت [۱۹-۲۱]. از این رو، تلفیق تئوری الاستوپلاستیک با مکانیک‌های آسیب به دلیل حصول نتایج قابل قبول برای پیش بینی رفتار مکانیکی مصالح بتنی بیشتر مورد استفاده قرار گرفته است [۲۲-۲۵]. لازم به ذکر است که نقص عمده مدل‌های آسیب آن است که برای تعریف تغییرشکل‌های غیر قابل بازگشت و انبساط حجمی غیرالاستیک در برابر فشار به اندازه کافی مناسب نیستند [۲۶-۳۰]. به طور کلی، قوانین مشخصه مبتنی بر آسیب‌های الاستیک، الاستوپلاستیک و مکانیک‌های شکست رویکرد استاندارد جهت توصیف رفتار مصالح نیمه ترد در هنگام در نظرگیری مکانیک پیوسته می‌باشند. اساساً در همه این مطالعات قوانین مشخصه آسیب الاستیک خالص، الاستوپلاستیک خالص و یا شکست الاستیک خالص جهت توصیف رفتار مواد نیمه ترد، رضایت بخش بودند.

هدف اصلی مطالعه حاضر ارائه یک قانون مشخصه جدید سه بعدی و غیرخطی است که قادر به ارائه روابط حاکم میان تنش و کرنش با تلفیق تئوری الاستوپلاستیک، مکانیک‌های شکست و قانون ترمودینامیک مبتنی بر تئوری آسیب است. از سوی دیگر، درک رفتار مصالح همچون شرایط جریان، خرابی، چگونگی ایجاد ترک و شکست از جمله عواملی هستند که در تشکیل مدل پایه بسیار حائز اهمیت می‌باشند. اخیراً بسیاری از محققان توابع پتانسیل ترکیبی متفاوت را برای ایجاد قوانین مشخصه خود اتخاذ نموده‌اند. هدف این مقاله یافتن یک تابع پتانسیل کلی نوین با قابلیت ارزیابی رفتار مصالح در حالات متفاوت می‌باشد. رفتار مواد نیمه ترد تحت شرایط نامقید و مقید را می‌توان به کمک قانون مشخصه حاصل از این تابع پتانسیل جدید تشریح نمود.

۲- مبانی نظری قانون مشخصه

الگوریتمی جهت تعمیم یک قانون مشخصه جدید پیشنهادی براساس ترمودینامیک، توسعه یافته است. در مطالعه حاضر، روابط ریاضی براساس انرژی آزاد هلمهولتز^۱ توسعه می‌یابند. نکته مهم جهت استفاده از ترمودینامیک برای بتن آن است که جایگزینی نقش فشار با تانسور تنش σ_{ij} و همچنین تغییر حجم مخصوص با تانسور کرنش ϵ_{ij} الزامی است [۳۱]. در نظریه آسیب-شکست الاستوپلاستیک (EPDF)^۲ برای ساده سازی لازم است چند متغیر کینماتیک داخلی مربوط به اشکال پیچشی در نظر گرفته شود. انرژی آزاد هلمهولتز به صورت $(\Psi_f(\epsilon_{ij}, \Theta, \kappa_{ij}^{pl}, \kappa_{ij}^{fr}, \kappa_{ij}^{da}))$ مطرح می‌گردد. لازم است قانون مشخصه EPDF نامساوی کلاسیوس-دوهم^۳ را ارضا نماید. این نامساوی به صورت زیر بیان می‌گردد:

¹ Helmholtz

² Elasto-Plastic-Damage-Fracture

³ Clausius-Duhem

$$d_{\text{mech}}^f = \rho_0 \sum_{e=pl,fr,da} \left(\frac{\partial \Psi_f}{\partial \kappa_{ij}^e} \dot{\kappa}_{ij}^e - \frac{\partial \Psi_f}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} \right) + \rho_0 \frac{\partial \Psi_f}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \rho_0 \frac{\partial \Psi_f}{\partial \theta} \dot{\theta} - \Psi_f \geq 0 \quad (1)$$

لازم به ذکر است که اتلاف مکانیکی EPDF مربوط به انرژی آزاد هلمهولتز را می‌توان به سادگی نوشت. براساس رویکرد ارائه شده در [۳۲] مجموعه‌های ترمودینامیکی مزدوج مربوط به نیروهای EPDF (A_K) و شارهای EPDF (\dot{a}_K) عبارت است از [۳۲]:

$$A_K = \left\{ \frac{\partial \Psi_f}{\partial \kappa_{ij}^{pl}}, \frac{\partial \Psi_f}{\partial \kappa_{ij}^{da}}, \frac{\partial \Psi_f}{\partial \kappa_{ij}^{fr}}, \frac{\partial \Psi_f}{\partial \varepsilon_{ij}}, \frac{\partial \Psi_f}{\partial \varepsilon_{ij}^{da}}, \frac{\partial \Psi_f}{\partial \varepsilon_{ij}^{fr}} \right\} \quad (2)$$

$$\dot{a}_K = \left\{ \dot{\kappa}_{ij}^{pl}, \dot{\kappa}_{ij}^{fr}, \dot{\kappa}_{ij}^{da}, \dot{\varepsilon}_{ij}^{pl}, \dot{\varepsilon}_{ij}^{da}, \dot{\varepsilon}_{ij}^{fr} \right\}$$

بنابراین نامساوی کلاسیوس-دوهم مربوط به انرژی آزاد هلمهولتز به صورت $d_{\text{mech}}^f = A_K \dot{a}_K \geq 0$ تغییر می‌یابد. همچنین این بیان که در صورت صفر بودن کلیه نیروها، کلیه شارها نیز صفر خواهد بود، منطقی به نظر می‌رسد (اگر $A_K = 0$ then $\dot{a}_K = 0$). در مطالعه حاضر از رویکرد پتانسیل به‌منظور دریافت قوانین تکاملی EPDF برای \dot{a}_K و براساس ارضای اتلاف مکانیکی EPDF مربوط به انرژی آزاد استفاده می‌شود [۳۲]. با توجه به رویکرد فوق‌الذکر دو پدیده پتانسیل جهت تعریف قانون مشخصه EPDF بتن مسلح مورد نیاز است [۳۱]: اولین مورد پتانسیل انرژی آزاد هلمهولتز و مورد دوم سطح تسلیم است. بنابراین رابطه (۳) بیانگر تخمین قانون مشخصه EPDF بنیادی به صورت زیر می‌باشد:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi_f}{\partial \varepsilon_{ij}} \\ s = -\frac{\partial \Psi_f}{\partial \theta} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} A_K = \frac{\partial \Psi_f}{\partial a_K} \\ \dot{a}_K = \lambda^y \frac{\partial y^f}{\partial A_K} \end{array} \right. \quad (3)$$

هنگامی که مصالح بتنی تحت بارگذاری‌های چرخه‌ای همچون زلزله قرار می‌گیرند، به شکل افزایشی قانون مشخصه EPDF برای تحلیل غیرخطی مورد نیاز است. بنابراین رابطه (۳) با استفاده از تحلیل المان محدود غیرخطی به شرح ذیل تغییر می‌یابد:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\sigma}_{ij} \\ \dot{A}_K \\ -\dot{s} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 \Psi_f}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{ij}} & \frac{\partial^2 \Psi_f}{\partial \varepsilon_{ij} \partial a_K} & \frac{\partial^2 \Psi_f}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \theta} \\ \frac{\partial^2 \Psi_f}{\partial a_K \partial \varepsilon_{ij}} & \frac{\partial^2 \Psi_f}{\partial a_K \partial a_K} & \frac{\partial^2 \Psi_f}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \theta} \\ \frac{\partial^2 \Psi_f}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \theta} & \frac{\partial^2 \Psi_f}{\partial a_K \partial \theta} & \frac{\partial^2 \Psi_f}{\partial \theta \partial \theta} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \dot{\varepsilon}_{ij} \\ \dot{a}_K \\ \dot{\theta} \end{array} \right\} \quad (4)$$

برای اعمال ضریب پلاستیک λ_{pl}^y به سه رابطه زیر نیاز است:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{pl} = 0 \xrightarrow{\lambda_{pl}^y=0} \text{neutral loading} \\ \Phi_{pl} = 0 \xrightarrow{\lambda_{pl}^y>0} \text{plastic loading} \\ \Phi_{pl} < 0 \xrightarrow{\lambda_{pl}^y=0} \text{elastic unloading} \end{array} \right. \quad (5)$$

لازم به ذکر است که شرط سازگاری پلاستیسیته $\lambda_{pl}^y \dot{\Phi}_{pl} = 0$ می‌باشد. فرض می‌شود که کرنش نیز شامل کرنش‌های الاستیک، پلاستیک، آسیب و شکست است.

$$\varepsilon = \varepsilon^{da} + \varepsilon^{el} + \varepsilon^{fr} + \varepsilon^{pl} \quad (6)$$

از طرفی انرژی آزاد هلمهولتز از چهار بخش متفاوت براساس انرژی‌های الاستیک، پلاستیک، آسیب و شکست تشکیل شده است:

$$\Psi_f = \Psi_f^{el}(\varepsilon^{el}) + \Psi_f^{pl}(A_k^{pl}) + \Psi_f^{da}(\varepsilon^{da}, A_k^{da}) + \Psi_f^{fr}(\varepsilon^{fr}, A_k^{fr}) \quad (7)$$

$$d_{mech}^f = d_{mech}^{el} + d_{mech}^{pl} + d_{mech}^{fr} + d_{mech}^{da} \geq 0 \quad (8)$$

که در رابطه فوق:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{mesh}^{el} = \left(\sigma - \frac{\partial \Psi_f^{el}}{\partial \varepsilon^{el}} \right) : \dot{\varepsilon}^{el} \geq 0 \\ d_{mesh}^{pl} = \sigma : \dot{\varepsilon}^{pl} - \frac{\partial \Psi_f^{pl}}{\partial a_k^{pl}} \dot{a}_k^{pl} \geq 0 \\ d_{mesh}^{da} = \sigma : \dot{\varepsilon}^{da} - \frac{\partial \Psi_f^{da}}{\partial a_k^{da}} \dot{a}_k^{da} \geq 0 \\ d_{mesh}^{fr} = \sigma : \dot{\varepsilon}^{fr} - \frac{\partial \Psi_f^{fr}}{\partial a_k^{fr}} \dot{a}_k^{fr} \geq 0 \end{array} \right.$$

۳- یک تابع پتانسیل نوین

از مختصات واحد در حالت تنش‌هایگ- وسترگارد^۴ جهت تشکیل توابع پتانسیل براساس نامتغیرهای تنشی استفاده می‌شود [۱۸]. یک محدودیت کلیدی این رویکرد، محدودیت تحلیل برای رفتار همسانگرد است. بنابراین، در بیان‌هایگ- وسترگارد از مکان تسلیم استفاده شده و سه مختصات واحد مربوطه شامل ρ ، ξ و θ به صورت [۱۹] مشخص می‌شود:

$$\xi = I_\sigma/3 = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3, \theta = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3\sqrt{3} III_S}{2 \sqrt{II_S^3}} \right), \rho = \sqrt{2II_S} \quad (9)$$

که در رابطه فوق I_T ، II_T و III_T نامتغیرهای اساسی تانسور T هستند. تابع پتانسیل با استفاده از رابطه زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$\Phi = \Phi_{pl} + \Phi_{da} + \Phi_{fr} \quad (10)$$

$$\Phi_{pl} = \Phi_{pl1}(I_\sigma) + \Phi_{pl2}(II_S, III_S) \quad (11)$$

که تابع پتانسیل پلاستیک (Φ_{pl}) شامل دو تابع Φ_{pl1} و Φ_{pl2} است. بنابراین Φ_{pl1} وابسته به فشار هیدرواستاتیک بوده و Φ_{pl2} بیانگر تابع پتانسیل در صفحه انحرافی است. به‌منظور ایجاد تابع پتانسیل جدید براساس یافته‌های تجربی در ادبیات فنی، لازم است شرایط زیر ارضا شود:

۱- بیان تابع پتانسیل باید بر روی سطوح و نصف النهار نمایش داده شود.

۲- سطح مقطع تابع پتانسیل باید همواره عمود بر محور هیدرواستاتیک باشد.

⁴ Haigh-Westergaard

۳- مقاطع تابع پتانسیل عمود بر فشار هیدرواستاتیک باید دارای تقارن سه برابری باشد.

۴- یافته‌های آزمایشگاهی نشان می‌دهد که منحنی‌های تابع پتانسیل روی سطح انحرافی دارای خصوصیات زیر هستند:

الف- سطح تابع پتانسیل باید همواره مسطح باشد.

ب- سطح تابع پتانسیل حداقل برای حالت تنش فشاری محدب است.

تابع پتانسیل به اولین نامتغیر تانسور تنش II به علاوه دومین و سومین نامتغیر تانسور تنش انحرافی (IIS و IIIS) وابسته است. در سطح انحرافی، شعاع فشار بزرگتر از شعاع کشش می‌باشد. از طرفی بارگذاری خالص فشار هیدرواستاتیک منجر به شکست نخواهد شد.

۳-۱ تولید تابع ϕ_{pl2}

در این بخش با استفاده از مفهوم تحدب، تابع ϕ_{pl2} بین حدود بالا و پائین تولید می‌شود.

۳-۱-۱ حد بالا

در صورتی که رابطه مربوط به حد بالایی در مختصات قطبی (شکل ۱) بازنویسی شود:

$$\rho \cos(\theta) = \text{etc} \quad (12)$$

۳-۱-۲ حد پائین

اگر رابطه حد پائین در مختصات قطبی بازنویسی شود، این رابطه به صورت زیر ارائه می‌گردد (شکل ۱):

$$\rho \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \text{etc} \quad (13)$$

مقاطع عرضی تابع پتانسیل عمود بر فشار هیدرواستاتیک باید دارای تقارن سه گانه باشند، بنابراین:

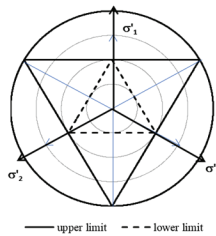
$$\frac{\Phi_{pl2}}{\rho} \in \left[\cos\left(\frac{1}{3} \cos^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3} III_S}{2 \sqrt{II_S^3}}\right) - \frac{\pi}{3}\right), \cos\left(\frac{1}{3} \cos^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3} III_S}{2 \sqrt{II_S^3}}\right)\right) \right] \quad (14)$$

این رابطه به عنوان فرم تابع پتانسیل مربوطه (تک، مسطح) تعریف می‌شود. خصوصاً شکل مربوط به بخش انحرافی به وسیله a_j و

b_j فرموله می‌گردد:

$$\Phi_{pl2} = \sqrt{II_S} \left[\cos\left(\frac{1}{3} \cos^{-1}\left(a_j \frac{III_S}{\sqrt{II_S^3}}\right) - b_j \right) \right] \quad (15)$$

در رابطه فوق حدود تغییرات a_j و b_j در بازه $0 \leq a_j \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ و $0 \leq b_j \leq \frac{\pi}{3}$



شکل ۱: بیانی از حدود تحدب

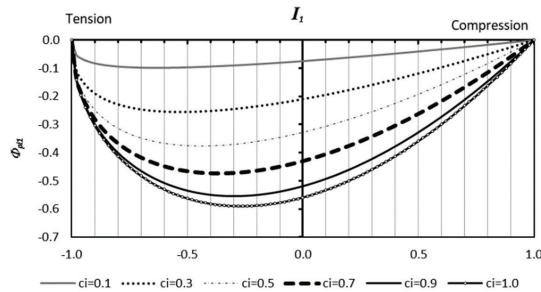
۷- قادر به کنترل حساسیت در نواحی فشاری و کششی

$$\Phi_{pl1} = -D_i \sqrt{[(A_i I_\sigma - \sqrt{3}\sigma_s)^2 + B_i(A_i I_\sigma - \sqrt{3}\sigma_s)]} \times (1 - (A_i I_\sigma - \sqrt{3}\sigma_s)^{C_i}) \quad (18)$$

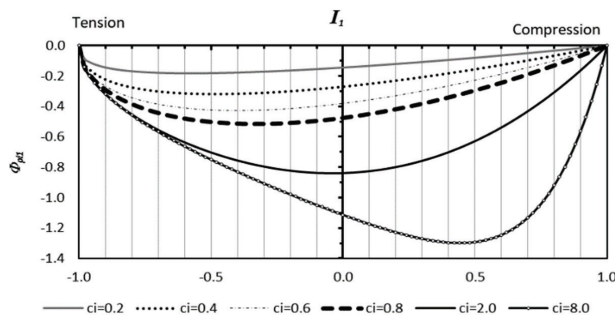
در رابطه فوق D_i متغیری برای کنترل حساسیت فشار، A_i و σ_s مقاومت تحت فشار یا کشش ایزوتروپیک است. اعوجاج بخش نصف‌النهار به کمک B_i و C_i تعریف می‌شود که:

$$\begin{cases} D_i \geq 0 \\ A_i \geq 0 \\ B_i \geq 0 \\ C_i \geq 0 \\ \sigma_s \geq 0 \end{cases} \quad A_i I_1 \in [\sqrt{3}\sigma_s, \sqrt{3}\sigma_s + 1], \quad \text{در غیر اینصورت } \Phi_{pl1} \rightarrow +\infty$$

شکل ۳ اثرات مربوط به تغییرات پارامترها را نشان می‌دهد.



الف: $\sqrt{3}\sigma = -0.5 \quad A_i = 0.5 \quad D_i = 1 \quad B_i = 2$



ب: $\sqrt{3}\sigma = -0.5 \quad A_i = 0.5 \quad D_i = 1 \quad B_i = 2$

شکل ۳: بخش نصف‌النهار: اثرات مربوط به تغییر پارامترها

۳-۲-۱ توابع سخت شونده‌گی و نرم شونده‌گی

تابع کرنشی سخت/نرم مربوط به بتن در طول بارگذاری پلاستیک (از سطح تسلیم تا تخریب) قادر به شبیه سازی شرایط و شکل سطح بارگذاری است. این تغییرات به کمک یک پارامتر کرنشی سخت، ϵ_v^{pl} که به طور معمول معادل با طول بردار کرنش پلاستیک است، کنترل می‌گردد. $H(\epsilon_v^{pl})$ بیانگر تابع سختی سخت شونده‌گی بر مبنای کرنش حجمی پلاستیک بوده که موقعیت و شکل سطح بارگذاری در طول فرآیند سخت شونده‌گی را محاسبه می‌نماید. مهمترین پارامترهای مربوط به سخت شونده‌گی و نرم شونده‌گی شامل

کرنش برشی پلاستیک، کرنش حجمی پلاستیک، انرژی شکست و کار پلاستیک می‌باشد. تابع سختی مربوط به سخت‌شوندگی عبارت است از:

$$\frac{H(\varepsilon_v^{pl}) - \beta_t}{1 - \beta_t} = \frac{\left(\frac{\varepsilon_v^{pl}}{\varepsilon_{v0}^{pl}}\right) \times \kappa}{\left[\left(\frac{\varepsilon_v^{pl}}{\varepsilon_{v0}^{pl}}\right)^\kappa + \kappa - 1\right]} \quad (19)$$

در رابطه فوق κ برابر است با:

$$\kappa = \begin{cases} 1.1 & \text{for } 0 > \varepsilon_v^{pl} \geq \varepsilon_{v0}^{pl} \\ 1.001 & \text{for } \varepsilon_v^{pl} > \varepsilon_{v0}^{pl} \end{cases} \quad (20)$$

به منظور تطبیق و کالیبره ساختن مقدار اولیه کرنش حجمی پلاستیک، به طور نسبی فرض می‌شود که در نقطه تنش حداکثر، مانند مقاومت فشاری نهایی، حجم تنها ناشی از کرنش‌های شکست و آسیب بوده و بنابراین مجموع کرنش حجمی الاستیک و پلاستیک صفر است. از این رو کرنش حجمی پلاستیک مشابه با مقاومت نهایی بتن در برابر کرنش حجمی الاستیک است.

$$\varepsilon_{v0}^{pl} = \frac{1 - 2\nu}{E_{itm}} f'_c \quad (21)$$

پارامتر $S(\varepsilon_v^{pl})$ حاسبه شکل و موقعیت سطح بارگذاری در طول فرآیندهای نرم‌شوندگی تعریف شده که از کرنش حجمی پلاستیک ایجاد و به صورت زیر مطرح می‌گردد:

$$S(\varepsilon_v^{pl}) = \frac{\left(\frac{\varepsilon_v^{pl}}{\varepsilon_{v0}^{pl}}\right) \times \kappa_S}{\left[\left(\frac{\varepsilon_v^{pl}}{\varepsilon_{v0}^{pl}}\right)^{\kappa_S} + \kappa_S - 1\right]} \quad (22)$$

در رابطه فوق κ_S عبارت است از:

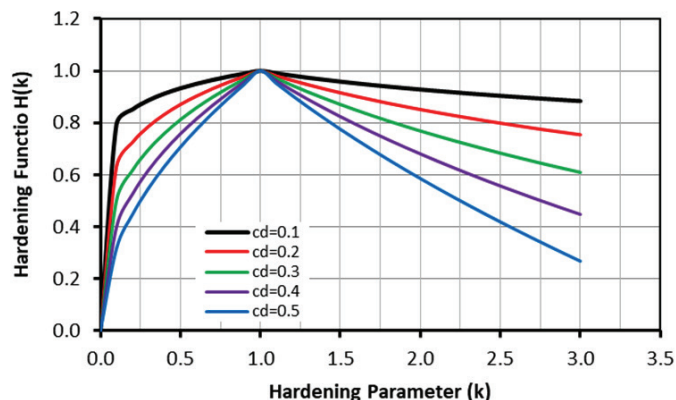
$$\kappa_S = \begin{cases} 1.001 & \text{for } 0 > \varepsilon_v^{pl} \geq \varepsilon_{v0}^{pl} \\ 6 & \text{for } \varepsilon_v^{pl} > \varepsilon_{v0}^{pl} \end{cases} \quad (23)$$

۳-۳ تشکیل توابع پتانسیل آسیب

پتانسیل آسیب ϕ_{da} با استفاده از مجموع دو سهم تعریف می‌گردد؛ اولی ارزیابی معیار آسیب بدون ترکیب با پلاستیسیته را در نظر می‌گیرد که شامل معیارهای خردشدگی و ترک خوردگی است:

$$\begin{aligned} \Phi_{da1} &= \Phi_{da1crashing} + \Phi_{da1cracking} \\ \Phi_{da1} &= H(\kappa)P_c(1 + \omega_c)^{n_c} + H(\kappa)P_t(1 + \omega_t)^{n_t} \end{aligned} \quad (24)$$

$$P_c + P_t = 1, H(\kappa) = 1 - \left| \left(\frac{\kappa}{\varepsilon_c}\right)^{cd} - 1 \right|, \kappa = \frac{1 - 2\nu}{E} I_1^c \quad (25)$$

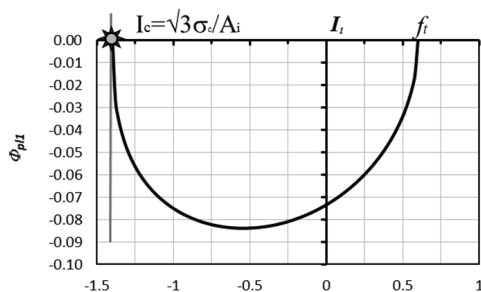


شکل ۴: تابع سخت شونده‌گی مربوط به پتانسیل آسیب

P_t و P_c اسکالرهایی وزنی بوده که تاثیر آسیب بر تغییر شکل فشاری و کششی را تنظیم می‌کنند. فرض اساسی آن است که در مقدار تنش‌های نسبتاً کوچک پدیده‌های غیر قابل بازگشت همچون ترک‌هایی در مقیاس میکرو رخ داده که علاوه بر کاهش تانسور سختی منجر به کرنش‌های برگشت ناپذیر نیز می‌شود. عبارت دوم، ϕ_{da2} ، بیانگر پتانسیل آسیب حجمی که تنزل بهنگام را در زمان بارگذاری مواد نیمه ترد در امتداد محور هیدرواستاتیک محاسبه می‌کند. این تابع بیانگر یک کلاهک حجمی بوده که به متغیر مزدوج داخلی حجمی تبدیل می‌شود. در این تابع پتانسیل ϕ_{da2} برای متغیر مزدوج داخلی حجمی می‌توان مشاهده کرد که با افزایش درجه چگالی، کلاهک به سمت بینهایت حرکت می‌کند. این تابع از مدل‌های کلاهک بیضوی الهام گرفته شده است [۳۳] براساس نتایج تجربی در سال ۱۹۷۸، متغیر مزدوج حجمی داخلی به صورت زیر قابل تعریف است [۳۴]:

$$\Phi_{da2}(D, a, a^v) = I_1^c - \frac{D}{a} \ln \left(\frac{a}{a - a^v} \right) \quad (26)$$

در رابطه فوق، a^v آسیب حجمی سه بعدی همسانگرد، D نرخ تراکم، a حداکثر درجه تراکم پارامتر و $I_1^c = \frac{\sqrt{3}\sigma_s}{A_i}$ حد تنش هیدرواستاتیک (شکل ۵) است.



شکل ۵: حد تنش هیدرواستاتیک فشاری

۳-۴ تشکیل توابع پتانسیل شکست

۳-۴-۱ مفهوم مکانیک‌های شکست

تابع پتانسیل شکست تحت تاثیر انرژی شکست، طول مشخصه و فاکتورهای شدت تنش بحرانی در سه حالت شکست K_{II} ، K_I و K_{III} (شکل ۶) قرار دارد. استفاده از ϕ_{ff} مربوط به شکست مود ترکیبی سه بعدی روشی مؤثر برای تحلیل انتشار ترک در مواد نیمه

ترد با فضای گسترده می‌باشد [۳۵] (شکل ۷). رابطه زیر، بیان ریاضی معیار شکست مود ترکیبی را ارائه می‌دهد:

(۲۷)

$$\alpha_{123} K_I K_{IC} + \beta_{123} K_{II}^2 + \gamma_{123} K_{III}^2 + \xi_{123} |K_{II} K_{III}| = K_{IC}^2$$

در رابطه α_{123} ، β_{123} ، γ_{123} ، ξ_{123} ، K_{II} فاکتور شدت مود برش صفح‌های، K_{III} فاکتور شدت مود پاره شدگی، K_{IC} چقرمگی شکست، مقادیر ثابت هستند. بنابراین، تابع پتانسیل مشخصه برای در نظرگیری رفتار شکست عبارت است از:

$$\Phi_{fr} = \alpha_{123} \frac{K_I}{K_{IC}} + \beta_{123} \frac{K_{II}^2}{K_{IC}^2} + \gamma_{123} \frac{K_{III}^2}{K_{IC}^2} + \xi_{123} \frac{|K_{II} K_{III}|}{K_{IC}^2} \quad (28)$$

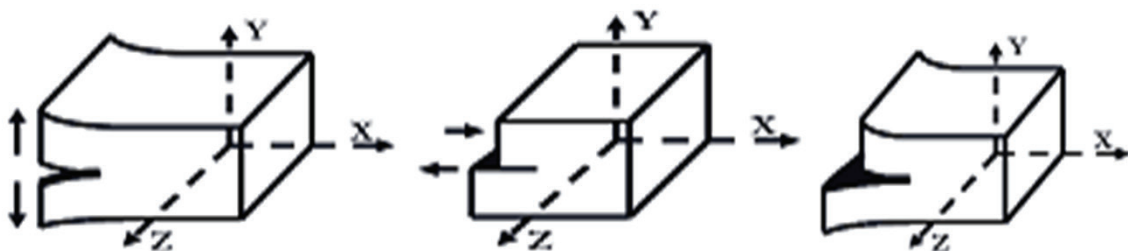
اگر تنش کششی حداکثر همواره عمود بر سطح ترک باشد، رابطه قبل را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد [۳۶]:

$$\begin{cases} K_{IC} = f_c \sqrt{\pi \lambda_1} \\ \lambda_1 = \frac{EG_f}{f_t} \\ \lambda_{ch} = \frac{EG_F}{f_t} \end{cases} \quad \begin{cases} K_I = \sigma_1 \sqrt{\pi \lambda_{ch}} \\ K_{II} = \sigma_2 \sqrt{\pi \lambda_{ch}} \\ K_{III} = \sigma_3 \sqrt{\pi \lambda_{ch}} \end{cases} \quad (29)$$

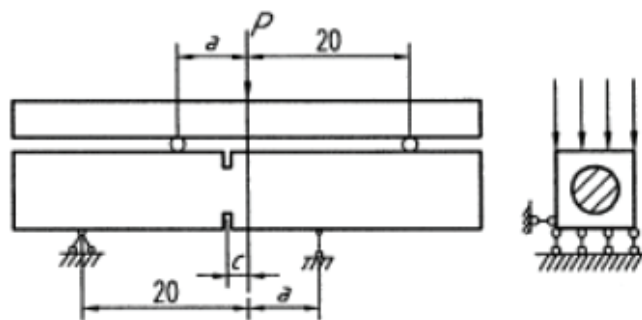
G_F انرژی شکست مربوط به مدل ترک چسبنده بوده و معادل با γ/Δ می‌باشد. λ_1 و λ_{ch} به ترتیب مشخصه شکست و طول مسیر خطی هستند.

$$\Phi_{fr} = \bar{\alpha}_{123} \sigma_1 + \bar{\beta}_{123} \sigma_2^2 + \bar{\gamma}_{123} \sigma_3^2 + \bar{\xi}_{123} |\sigma_2 \sigma_3| \quad (30)$$

لازم است این تابع به حالت تنش تبدیل شود.



شکل ۶: شکل سه مود شکست



شکل ۷: هندسه، بارگذاری و شرایط قيود نمونه‌ها در هنگام وقوع سه مود شکست [۲۸]

۴- قانون مشخصه EPDF برای مصالح نیمه ترد براساس تابع پتانسیل جدید

جهت توصیف مصالح نیمه ترد در حالت فشار، این نوع از تابع پتانسیل انتخاب شده است. این نوع تابع پتانسیل به سادگی قابل مدیریت بوده و دارای کیفیت مدل سازی مناسب حداقل برای بارگذاری نسبی تک یا دو محوری است. به منظور ارزیابی قانون مشخصه مصالح نیمه ترد، لازم است وجه تمایز این تابع با توجه به موارد زیر مشخص گردد:

$$\frac{\partial I_1}{\partial \sigma} = \mathbf{I}, \frac{\partial J_2}{\partial \sigma} = \frac{S + S^T}{2}, \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} = S^2 - \frac{tr S^2}{3} \mathbf{I} \quad (31)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \sigma} = \mathbf{I} \otimes \underline{\underline{I}} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (32)$$

در روابط فوق $\mathbf{I} \otimes \underline{\underline{I}}$ معرف تانسور مرتبه چهارم متقارن بوده و برای کلیه تانسورها، پارامتر A به صورت $\mathbf{I} \otimes \underline{\underline{I}} [A] = \frac{(A^T + A)}{2}$ تعریف می گردد [۲۹]. از طرفی عمود بر \mathbf{I} و S می باشد.

$$\frac{\partial S^2}{\partial \sigma} = 2S \left[\mathbf{I} \otimes \underline{\underline{I}} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right] \quad (33)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = \frac{\partial \Phi_{pl1}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \Phi_{pl2}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \Phi_{da1}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \Phi_{da2}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \Phi_{fr}}{\partial \sigma} \quad (34)$$

به منظور تشخیص بهتر پاسخ EPDF، روابط مربوط به نرخ مماسی استخراج شده اند که با قوانین کلی توسعه یافته فوق الذکر مرتبط هستند. رابطه (۳۵) بیانگر رابطه میان نرخ کرنش کلی $\dot{\epsilon}$ و تنش کلی $\dot{\sigma}$ است:

$$\dot{\sigma} = E^{el} \dot{\epsilon}^{el} = E^{el} (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^{pl} - \dot{\epsilon}^{fr} - \dot{\epsilon}^{da}) \quad (35)$$

که $E^{el} = \frac{\partial^2 \Psi_f^{el}}{\partial (\epsilon^{el})^2}$ نرخ کرنش شکست بوده که می تواند در روش معمول حذف شود. در واقع ترکیب سازگاری شکست با رابطه (۳۵) منجر به شکل گیری روابط زیر می گردد:

$$\dot{\sigma} - E^{el} \dot{\epsilon}^{fr} = E^{el} (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^{pl} - \dot{\epsilon}^{da}) \quad (36)$$

$$\dot{\sigma} = \left(2\mathbf{I} \otimes \underline{\underline{I}} - E^{el} E^{fr-1} \right)^{-1} E^{el} (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^{pl} - \dot{\epsilon}^{da}) \quad (37)$$

$$E^{ef} = \left(2\mathbf{I} \otimes \underline{\underline{I}} - E^{el} E^{fr-1} \right)^{-1} E^{el} \quad (38)$$

$$\dot{\sigma} = E^{ef} (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^{pl} - \dot{\epsilon}^{da}) \quad (39)$$

نرخ کرنش پلاستیک بوده که در روش متداول قابل حذف است. به عبارتی ترکیب سازگاری پلاستیک با رابطه (۳۹) روابط (۴۰) - (۴۲) را به دنبال خواهد داشت:

$$\dot{\sigma} - E^{ef} \dot{\epsilon}^{pl} = E^{el} (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^{da}) \quad (40)$$

$$E^{epf} = E^{ef} - \frac{E^{ef} \frac{\partial \Phi_{pl}}{\partial \sigma} \otimes \frac{\partial \Phi_{pl}}{\partial \sigma} E^{ef}}{\left(\frac{\partial \Phi_{pl}}{\partial A_k^{pl}} \right)^2 \frac{\partial^2 \Psi_f^{pl}}{\partial a_k^2} + \frac{\partial \Phi_{pl}}{\partial \sigma} : E^{ef} : \frac{\partial \Phi_{pl}}{\partial \sigma}} \quad (41)$$

$$\dot{\sigma} = E^{epf} (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^{da}) \quad (42)$$

نهایتاً $\dot{\epsilon}^{da}$ نرخ کرنش آسیب بوده که می تواند در روش معمول صرف نظر گردد. از طرفی ترکیب سازگاری پلاستیک با رابطه (۴۲) نتیجه می دهد که:

$$\dot{\sigma} - E^{epf} \dot{\varepsilon}^{da} = E^{epf} (\dot{\varepsilon}) \quad (43)$$

$$E^{epf} - \frac{E^{epf} \frac{\partial \Phi_{da}}{\partial \sigma} \otimes \frac{\partial \Phi_{da}}{\partial \sigma} E^{epf}}{\left(\frac{\partial \Phi_{da}}{\partial A_k^{da}} \right)^2 \frac{\partial^2 \Psi_f^{da}}{\partial (a_k^{da})^2} + \frac{\partial \Phi_{da}}{\partial \sigma} : E^{ef} : \frac{\partial \Phi_{da}}{\partial \sigma}} \quad (44)$$

$$\dot{\sigma} = E^{epf} \dot{\varepsilon} \quad (45)$$

۵- کالیبراسیون پارامترها

چندین پارامتر از مدل کامل مصالح را می‌توان به کمک آزمایشات متعدد ارزیابی نمود (جدول ۱).

جدول ۱: کالیبراسیون پارامترها

			ε_t	ε_c	f_t	f_c	ϑ	E	انرژی داخلی	
			۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۲۵۳۷	۲/۸ MPa	۲۶/۵ MPa	۰/۱۸	۱۸/۴۷ GPa		
c_d	b_j	a_j	D_i	C_i	ω_c	ω_t	n_c	n_t	پارامتر پتانسیل	
۰/۵		.					.			
a	D	$\nu\alpha$	P_t	P_c			n_c	n_t		
۰/۰۸	۱۵/۵۳	۰/۰۲	۰/۵	۰/۵	۰/۱	۰/۱	۲/۵	۳/۵		
			$_{123}\xi$	$_{123}\gamma$	$_{123}\beta$	$_{123}\alpha$	λ	λ_{ch}	G_F	معیار شکست
			۰/۶۲۵۵	۰/۱۸۷	۲/۰۹	۱/۱۶	۱۹۵/۵۱۵	۴۸۸/۷۹۷	۲۰۷/۴۹۷	

۵-۱ انرژی داخلی

E معرف مدول یانگ اولیه (شکل ۸) بوده که برای نمونه‌های بتنی با وزن نرمال از رابطه (۴۶)، نمونه‌های بتنی سبک از رابطه

(۴۷) و نمونه‌های بتنی با مقاومت بالا از رابطه (۴۸) به دست می‌آید [۳۰]:

$$E = 2.25 \ln \left(\frac{f_c^{2.8}}{W_c^2} \right) + 0.05 f_c \quad (46)$$

$$E = 2.168 f_c^{0.535} \quad (47)$$

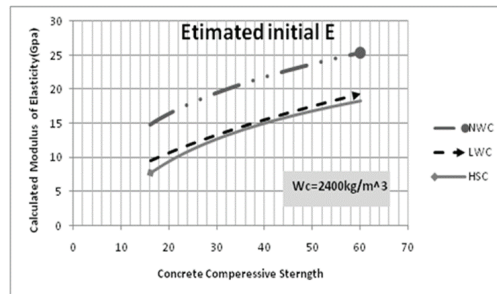
$$E = 60.03 \ln \left(\frac{f_c^{0.25}}{W_c^{0.1}} \right) + 20.575 \quad (48)$$

در روابط فوق، ν نسبت پواسون و f_c مقاومت فشاری برابر با مقدار میانگین مقاومت تک محوره تحت فشار بوده که به وسیله آزمایش تراکم سیلندر تخمین زده می‌شود [۱۴]. f_t مقاومت کششی و ε_c کرنش خردشدگی در صورت رسیدن به مقاومت فشاری بوده (شکل ۹) که برای نمونه‌های بتنی با وزن نرمال، نمونه‌های سبک و نمونه‌های با مقاومت بالا به ترتیب از روابط (۴۹)، (۵۰) و (۵۱) حاصل می‌گردد [۳۰]:

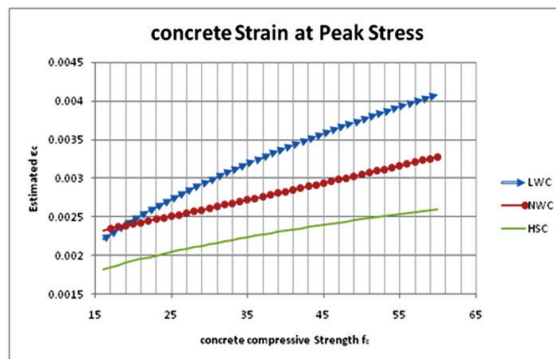
$$\varepsilon_c = (1.2f_c^{1.13} + 205) \times 10^{-5} \quad (49)$$

$$\varepsilon_c = (70f_c^{1.13} + 15) \times 10^{-5} \quad (50)$$

$$\varepsilon_c = (50f_c^{0.35} + 50) \times 10^{-5} \quad (51)$$



شکل ۸: تخمین مدول یانگ اولیه (E)



شکل ۹: تخمین کرنش فشاری (ε_c)

۶- تشکیل توابع تسلیم شناخته شده به کمک تابع پتانسیل جدید

توابع تسلیم شناخته شده و یا معیارهای تسلیم کلاسیک را می‌توان با ایجاد تغییر در پارامترهای تابع پتانسیل جدید، تولید کرد. این تابع پتانسیل قادر است به کلیه معیارهای تسلیم یا گسیختگی تبدیل شود. اصولاً معیارهای گسیختگی به چند گروه تقسیم بندی شده که از تغییر پارامترهای تابع پتانسیل جدید، حاصل می‌گردند. در جدول ۲ پارامترهای مبدل تابع پتانسیل جدید به برخی از توابع تسلیم شناخته شده، ارائه شده است. سایر پارامترها در منابع [۳۷-۴۱] موجود می‌باشند.

جدول ۲: تابع پتانسیل مرتبط با سطح تسلیم به عنوان موارد خاص تابع پتانسیل جدید

Φ_{fr}	Φ_{da}	Φ_{PL2}	Φ_{PL1}	توابع پتانسیل کلاسیک
...	...	$a_j = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ $b_j = \frac{5\pi}{6}$	$A_i = 0,$ $B_i = 0$ $\sigma_s = 0$ $C_i = [0, \infty)$ $D_i = \frac{f_c}{\sqrt{6\sigma_s^2(1 - (\sqrt{3}\sigma_s)^{C_i})}}$	ترسکا
...	...	$a_j = 0$ $b_j = \frac{\pi}{3}$	$A_i = 0$ $B_i = 0$ $\sigma_s = 0$ $C_i = [0, \infty)$ $D_i = \frac{2f_c}{3\sqrt{2\sigma_s^2(1 - (\sqrt{3}\sigma_s)^{C_i})}}$	فون میسز
...	...	$a_j = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ $b_j = 0$	$A_i = 1$ $B_i = 0$ $\sigma_s = \sqrt{3}f_t$ $C_i = 0$ $D_i = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$	رانکین
...	...	$a_j = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ $b_j = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}f_c}{2f_c + f_t}\right)$	$A_i = \frac{f_c \cos(b_j - \frac{\pi}{3}) - f_t \cos(b_j)}{(3f_c^2 + f_c f_t) \cos(b_j - \frac{\pi}{3}) - 2f_c f_t \cos(b_j)}$ $\sigma_s = \frac{f_c f_t \cos(b_j - \frac{\pi}{3}) + \cos(b_j)}{6(3f_c^2 + f_c f_t) \cos(b_j - \frac{\pi}{3}) - 6f_c f_t \cos(b_j)}$ $b_i = 0, C_i \rightarrow \infty$ $D_i = \frac{3f_c [f_c \cos(b_j - \frac{\pi}{3}) - f_t \cos(b_j)]}{f_c + f_t}$	موهر-کولمب
...	...	$a_j = 0$ $b_j = \frac{\pi}{3}$	$A_i = \frac{f_c - f_t}{3f_c^2}$ $B_i = 0$ $\sigma_s = \frac{2f_t}{\sqrt{3}(3f_c - f_t)}$ $C_i \rightarrow \infty$ $D_i = \frac{3f_c[f_c - f_t]}{f_c + f_t}$	دراکر-پراگر

...	...	$a_j = 0$ $b_j = \frac{\pi}{3} + \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}f_c}\right)$	$B_i = 0$ $\sigma_s = 0$ $C_i \rightarrow -\infty$ $A_i = \frac{1}{3f_c}$ $D_i = b$	برسلر و پیستر ^۵
f_c^2	...	$a_j = \frac{3\sqrt{3}}{2}K_2$	$A_i = 1$ $B_i = 0$ $\sigma_s = 0$ $C_i \rightarrow -\infty$ $D_i = -\frac{a}{f_c K_1}$	اُتسن ^۶
$\bar{\alpha}_{123} = \frac{d_1}{f_c}$ $\bar{\beta}_{123} = \frac{b_1}{f_c^2}$...	$a_j = 0$ $b_j = -\cos^{-1}\left(\frac{c}{f_c}\right)$	$A_i = 1$ $B_i = 0$ $\sigma_s = 0$ $C_i \rightarrow -\infty$ $D_i = -\frac{a_1}{f_c}$	هسیه ^۷
...	...	$A_j = 0$ $B_j = \frac{\pi}{3}$	$B_i \rightarrow \infty$ $\sigma_s = 0$ $C_i = 1$ $D_i = \frac{3f_c[f_c - f_t]}{f_c + f_t}$	کام-کلی ^۸ اصلاح شده

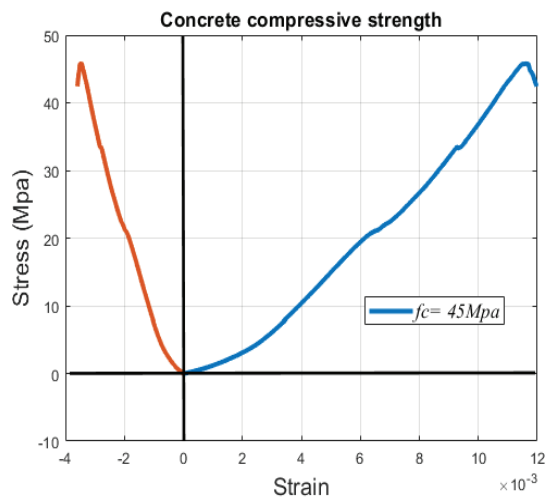
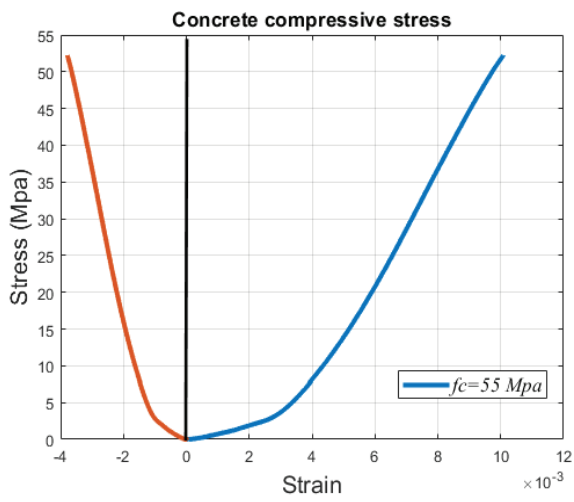
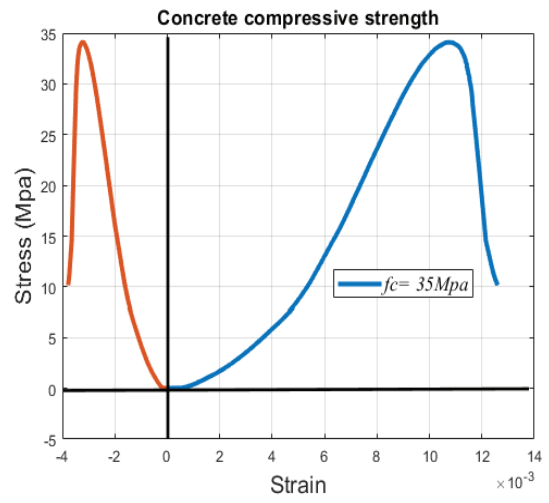
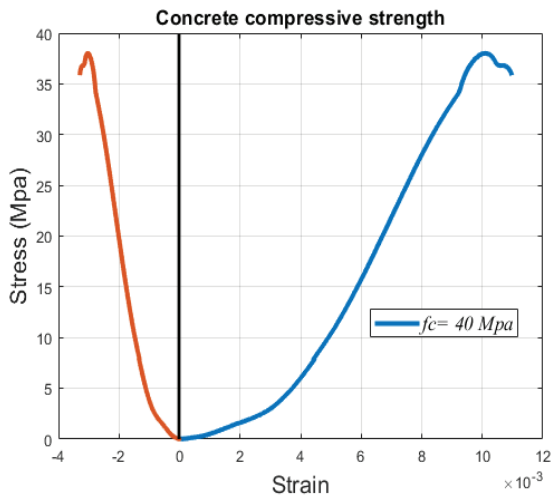
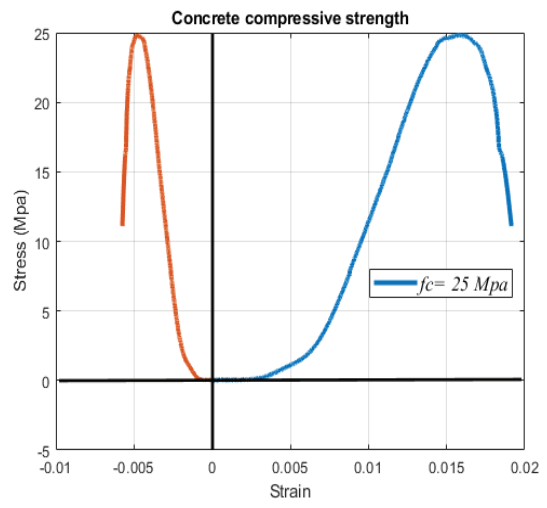
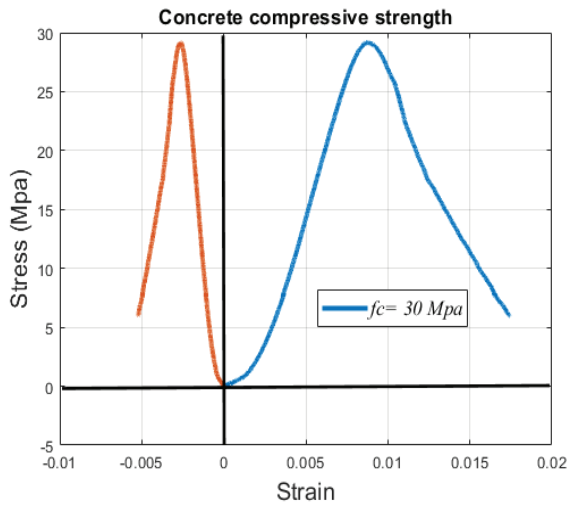
⁵ Bresler and Pister

⁶ Ottosen

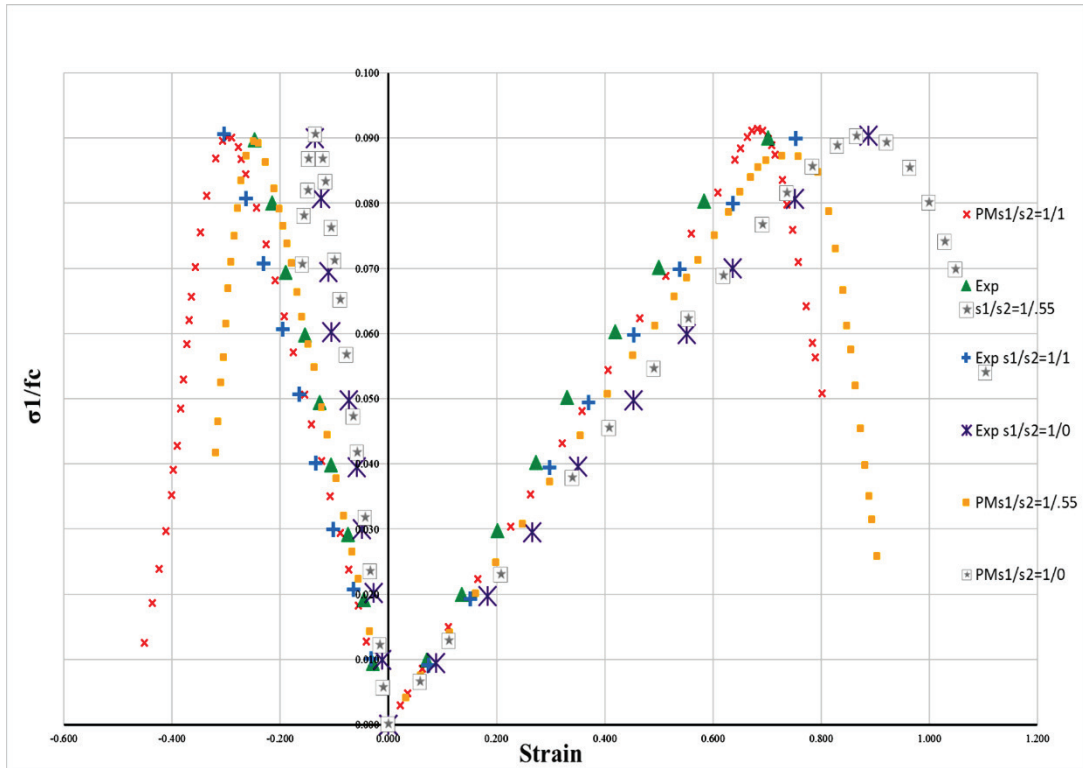
⁷ Hesieh

⁸ Modified Cam-Clay

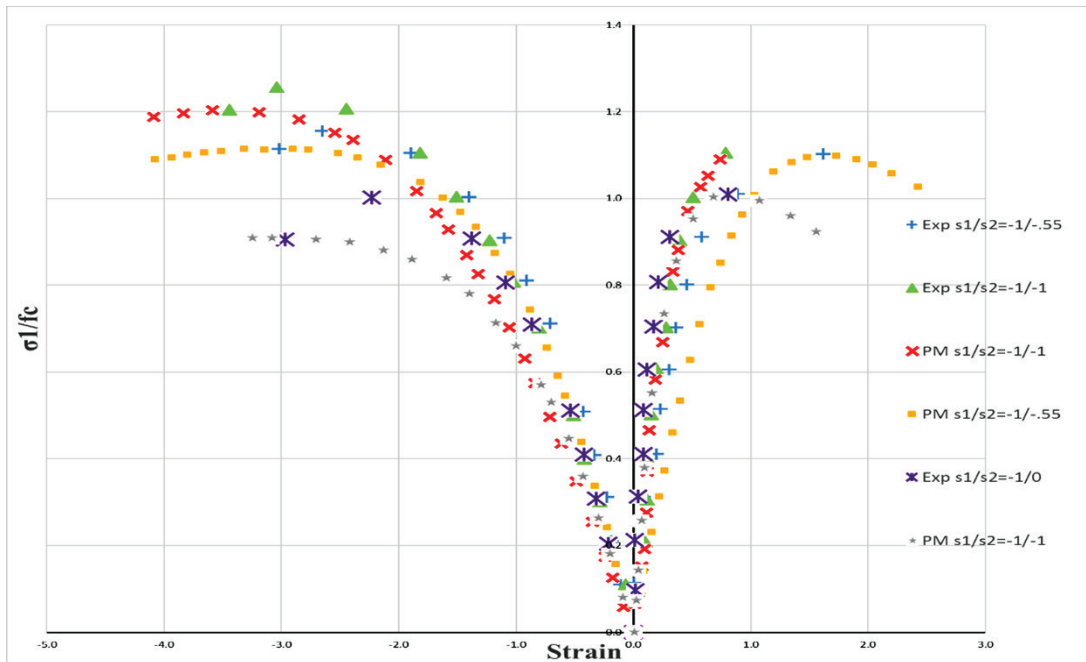




شکل ۱۱: منحنی‌های تنش-کرنش تک محوره تحت اثر تنش‌های فشاری و کششی



الف- بارگذاری فشاری



ب- بارگذاری کششی

شکل ۱۲: منحنی‌های تنش- کرنش بتن با مقاومت فشاری ۴۶/۹ مگاپاسکال تحت مقادیر متفاوت فشار محصورشدگی

۷-۱ فشار دو محوره

کوپفر^{۱۰} [۴۳] آزمایشات فشاری دو محوره را بر روی بتن معمولی و بتن با مقاومت بالا انجام داد. در طی انجام این آزمایشات نمونه‌های بتنی در دو راستا و با نسبت معین بارگذاری شدند. پارامترهای مربوط به مصالح بتنی بر اساس مطالعه تجربی مذکور به شرح ذیل است: مقاومت فشاری برابر با ۲۷/۶ مگاپاسکال بوده که برای نسبت‌های بارگذاری ۱:۱ و ۱:۰/۵۲ تحت شرایط آزمایشگاهی کوپفر و یا هر دو حالت بارگذاری فشاری و کششی به دست آمده است. شکل ۱۱ منحنی‌های تنش-کرنش بتن با مقاومت فشاری ۲۷/۶ مگاپاسکال تحت مقادیر متفاوت فشار محصورشدگی را نشان می‌دهد. براساس نتایج حاصل اگرچه تحت شرایط فشار دو محوره برای بتن با مقدار مقاومت متفاوت حداکثر تنش و کرنش متناظر آن با افزایش مقاومت بتن افزایش می‌یابد، بخش نرم شونده بتن با مقاومت بالا سریعتر تنزل یافته و لذا نتایج شبیه سازی شده مطابقت قابل قبولی با نتایج تجربی دارند.

۷-۲ فشار سه محوره

گرین و سوانسون [۴۴] به انجام آزمایشات فشار سه محوره بر روی بتن معمولی و بتن با مقاومت بالا پرداختند. پارامترهای مصالح بتنی در مدل با توجه به نتایج تجربی به شرح ذیل آزموده شده است: مدول یانگ (E_{im}) برابر با $3/7 \times 10^4$ مگاپاسکال و مقاومت فشاری و کششی نیز به ترتیب برابر با ۴۸/۴ و ۴/۸ مگاپاسکال می‌باشد. همچنین نتایج تجربی تحت سه مقدار متفاوت برای فشار محصور شدگی عبارت است از:

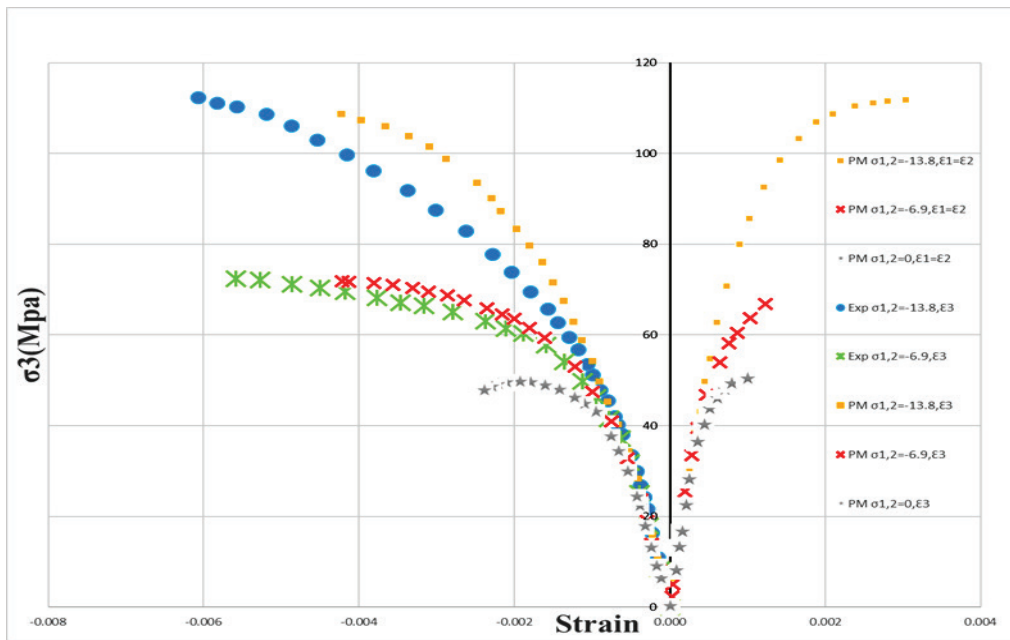
$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_2 = 0.00 \text{ Mpa} \\ \sigma_1 = \sigma_2 = -6.895 \text{ Mpa} \\ \sigma_1 = \sigma_2 = -13.79 \text{ Mpa} \end{cases}$$

شکل ۱۲ بیانگر منحنی‌های تنش-کرنش بتن با مقاومت فشاری ۴۸/۴ مگاپاسکال تحت اثر سه مقدار متفاوت فشار محصورشوندگی می‌باشد. عمران و پانتازوپولو [۴۵،۴۶] آزمایشات فشار سه محوره را بر روی بتن معمولی و با مقاومت بالا انجام دادند. پارامترهای مربوط به مصالح بتنی براساس مطالعه تجربی آن‌ها عبارت است از: مدول یانگ (E_{im}) برابر با $3/7 \times 10^4$ مگاپاسکال، مقاومت فشاری و کششی به ترتیب برابر با ۲۸/۶ و ۲/۸۶ مگاپاسکال است. از طرفی نتایج تجربی تحت مقادیر متفاوت فشار محصور شدگی برابر است با:

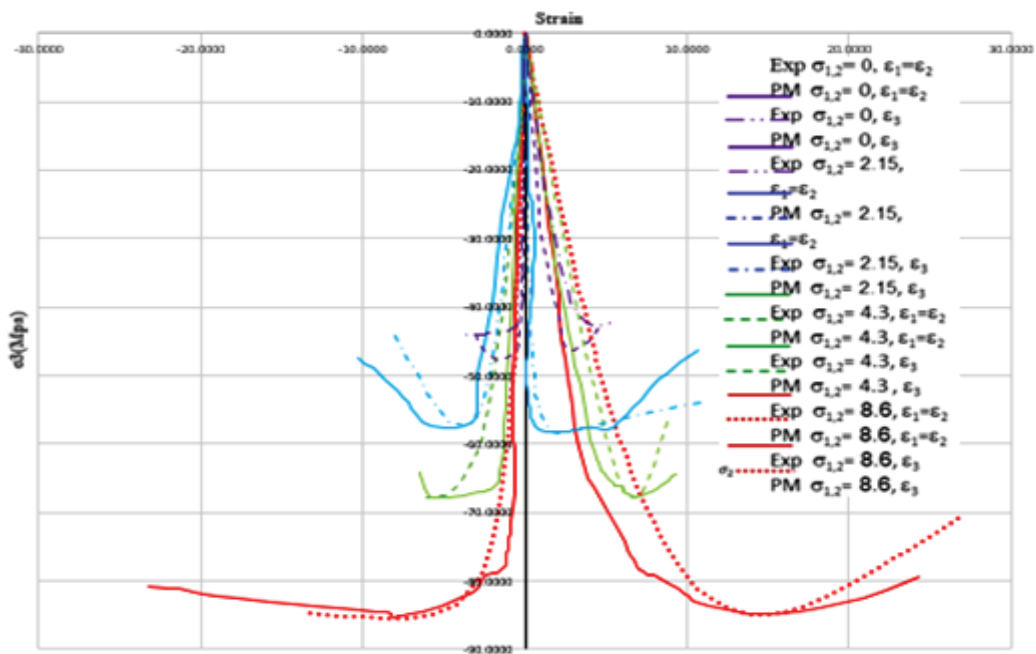
$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_2 = 00.00 \text{ Mpa} \\ \sigma_1 = \sigma_2 = -2.15 \text{ Mpa} \\ \sigma_1 = \sigma_2 = -4.30 \text{ Mpa} \\ \sigma_1 = \sigma_2 = -8.60 \text{ Mpa} \end{cases}$$

شکل ۱۳ منحنی‌های تنش-کرنش بتن با مقاومت فشاری برابر با ۴۸/۴ مگاپاسکال را تحت مقادیر متفاوت فشار محصورشوندگی نشان می‌دهد. نتایج مشابه با نتایج آزمایشگاهی بوده و دارای تطابق مناسبی است. بنابراین اشکال ۱۲ و ۱۳ به‌طور کلی حاکی از سازگاری مناسب نتایج شبیه سازی شده با نتایج تجربی است. مشخص شد که با افزایش فشار محدود، مقاومت حداکثر بتن و مقدار کرنش متناظر با آن افزایش می‌یابد. همچنین اثر نرم شوندگی کاهش یافته و روند نزولی منحنی تنش-کرنش، آهسته می‌گردد. مقایسه تنش و کرنش متناظر با بتن معمولی و مقاومت بالا تحت فشار سه محوره بیان میدارد که اثر نرم شوندگی در نمونه‌های بتنی تحت فشار محدود کننده ضعیفتر است.

¹⁰ Tanigao



شکل ۱۳: منحنی‌های تنش-کرنش بتن با مقاومت فشاری ۴۸/۴ مگاپاسکال تحت مقادیر متفاوت فشار محصورشوندگی



شکل ۱۴: منحنی‌های تنش-کرنش بتن با مقاومت فشاری ۲۸/۶ مگاپاسکال تحت مقادیر متفاوت فشار محصورشوندگی

۸- نتایج

در پژوهش حاضر یک تابع پتانسیل جدید با قابلیت استفاده از قانون مشخصه برای گروه وسیعی از مصالح شکل پذیر، ترد و حساس به فشار پیشنهاد شد. تابع پتانسیل مذکور احتمال تبدیل اغلب فرم‌های سطح تسلیم مرتبط و موجود برای مصالح نیمه ترد (بتن) و مواد شکل پذیر (فولاد) را فراهم می‌آورد. چهارچوب مطالعه حاضر بر پایه ترکیب پلاستیسیته مبتنی بر تنش، مکانیک‌های شکست و تئوری آسیب جهت مدل‌سازی رفتار نیمه ترد استوار است. مدل پیشنهادی برای استفاده به منظور تحلیل‌های سازه‌ای پیشرفته سازه‌های بتنی بهینه و کاربرد و میزان تطبیق مدل مشخصه پیشنهادی با نتایج تجربی ارائه شده توسط سایر محققان، صحت سنجی شد و اهم نتایج به شرح زیر است:

تابع پتانسیل جدید توسعه یافته برای مواد نیمه ترد با ماتریس‌های حساس نسبت به فشار تحت هر دو تنش هیدرواستاتیک فشاری و کششی معتبر است. این تابع را می‌توان جهت تشکیل یک قانون مشخصه برای مواد نیمه ترد براساس یک نظریه آسیب-شکست الاستوپلاستیک و مبتنی بر ترمودینامیک به کار برد.

ترکیب پلاستیسیته مبتنی بر تنش با فرمولاسیون شکست و تئوری آسیب به اندازه کافی برای پیش بینی رفتار بتن در محدوده وسیعی از حالات بارگذاری فشار تک محوره، دو محوره و کشش-فشار سه محوره مناسب می‌باشد.

مدل مشخصه به اندازه کافی برای کاربردهای سازه‌های سه بعدی مناسب بوده و به نظر می‌رسد از توانایی بالایی برای پیش‌بینی منطقی پاسخ تیرها، دیوارها و ستونهای بتنی و دیگر المانهای نیمه ترد تحت بارگذاری‌های چرخه‌ای برخوردار است.

مدل آسیب-شکست الاستوپلاستیک برای کاهش سختی ناشی از بارگذاری فشاری یا کششی قبلی به میزان اندک موفق می‌باشد.

مراجع

- [1] Z.P. Bažant, S.-S. Kim, *Nonlinear Creep of Concrete—Adaptation and Flow*, *J. Eng. Mech. Div.* 105 (1979) 429–446. <https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0002483>.
- [2] S.S. Hsieh, E.C. Ting, W.F. Chen, *A plastic-fracture model for concrete*, *Int. J. Solids Struct.* 18 (1982) 181–197. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(82\)90001-4](https://doi.org/10.1016/0020-7683(82)90001-4).
- [3] Y. Yao, H. Guo, K. Tan, *An elastoplastic damage constitutive model of concrete considering the effects of dehydration and pore pressure at high temperatures*, *Mater. Struct.* 2020 531. 53 (2020) 1–18. <https://doi.org/10.1617/S11527-020-1450-X>.
- [4] W.L. Qiu, F. Teng, S.S. Pan, *Damage constitutive model of concrete under repeated load after seawater freeze-thaw cycles*, *Constr. Build. Mater.* 236 (2020) 117560. <https://doi.org/10.1016/J.CONBUILDMAT.2019.117560>.
- [5] H. Zhen-jun, M. Yan-ni, W. Zhen-wei, Z. Xiao-jie, Z. Xue-sheng, D. Meng-jia, F. Chuan, *Triaxial strength and deformation characteristics and its constitutive model of high-strength concrete before and after high temperatures*, *Structures.* 30 (2021) 1127–1138. <https://doi.org/10.1016/J.ISTRUC.2020.11.078>.
- [6] G. Frantziskonis, C.S. Desai, *Constitutive model with strain softening*, *Int. J. Solids Struct.* 23 (1987) 733–750. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(87\)90076-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(87)90076-X).
- [7] J.W. Ju, *On energy-based coupled elastoplastic damage theories: Constitutive modeling and computational aspects*, *Int. J. Solids Struct.* 25 (1989) 803–833. <https://doi.org/10.1016/0020->

7683(89)90015-2.

- [8] Z.P. Bažant, *Concrete fracture models: Testing and practice*, *Eng. Fract. Mech.* 69 (2001) 165–205. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(01\)00084-4](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(01)00084-4).
- [9] J. Planas, M. Elices, G. V. Guinea, F.J. Gómez, D.A. Cendón, I. Arbilla, *Generalizations and specializations of cohesive crack models*, *Eng. Fract. Mech.* 70 (2003) 1759–1776. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(03\)00123-1](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(03)00123-1).
- [10] L. Contrafatto, M. Cuomo, *A framework of elastic–plastic damaging model for concrete under multiaxial stress states*, *Int. J. Plast.* 22 (2006) 2272–2300. <https://doi.org/10.1016/J.IJPLAS.2006.03.011>.
- [11] A.A. Lukyanov, *Constitutive behaviour of anisotropic materials under shock loading*, *Int. J. Plast.* 24 (2008) 140–167. <https://doi.org/10.1016/J.IJPLAS.2007.02.009>.
- [12] Z. Wang, X. Jin, N. Jin, A.A. Shah, B. Li, *Damage based constitutive model for predicting the performance degradation of concrete*, *Lat. Am. J. Solids Struct.* 11 (2014) 907–924. <https://doi.org/10.1590/S1679-78252014000600001>.
- [13] D. Lu, X. Zhou, X. Du, G. Wang, *3D Dynamic Elastoplastic Constitutive Model of Concrete within the Framework of Rate-Dependent Consistency Condition*, *J. Eng. Mech.* 146 (2020) 04020124. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001854](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001854).
- [14] W.B. Krätzig, R. Pölling, *Elasto-plastic damage-theories and elasto-plastic fracturing-theories – a comparison*, *Comput. Mater. Sci.* 13 (1998) 117–131. [https://doi.org/10.1016/S0927-0256\(98\)00052-4](https://doi.org/10.1016/S0927-0256(98)00052-4).
- [15] Z. Zhang, F. Ansari, *Fracture mechanics of air-entrained concrete subjected to compression*, *Eng. Fract. Mech.* 73 (2006) 1913–1924. <https://doi.org/10.1016/J.ENGFRACTMECH.2006.01.039>.
- [16] R.A. Einsfeld, M.S.L. Velasco, *Fracture parameters for high-performance concrete*, *Cem. Concr. Res.* 36 (2006) 576–583. <https://doi.org/10.1016/J.CEMCONRES.2005.09.004>.
- [17] C.S. Chang, T.K. Wang, L.J. Sluys, J.G.M. Van Mier, *Fracture modeling using a micro-structural mechanics approach—I. Theory and formulation*, *Eng. Fract. Mech.* 69 (2002) 1941–1958. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(02\)00070-X](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(02)00070-X).
- [18] W.-F. Chen, D.J. Han, *Plasticity for structural engineers*, Springer New York, NY, 1998.
- [19] R. Hill, *On constitutive inequalities for simple materials—I*, *J. Mech. Phys. Solids.* 16 (1968) 229–242. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(68\)90031-8](https://doi.org/10.1016/0022-5096(68)90031-8).
- [20] R. De Borst, *Fracture in quasi-brittle materials: a review of continuum damage-based approaches*, *Eng. Fract. Mech.* 69 (2002) 95–112. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(01\)00082-0](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(01)00082-0).
- [21] X. Zhang, H. Wu, J. Li, A. Pi, F. Huang, *A constitutive model of concrete based on Ottosen yield criterion*, *Int. J. Solids Struct.* 193–194 (2020) 79–89. <https://doi.org/10.1016/J.IJSOLSTR.2020.02.013>.
- [22] W.B. Krätzig, R. Pölling, *An elasto-plastic damage model for reinforced concrete with minimum number of material parameters*, *Comput. Struct.* 82 (2004) 1201–1215. <https://doi.org/10.1016/J.COMPSTRUC.2004.03.002>.
- [23] X. Tao, D. V. Phillips, *A simplified isotropic damage model for concrete under bi-axial stress states*, *Cem. Concr. Compos.* 27 (2005) 716–726. <https://doi.org/10.1016/J.CEMCONCOMP.2004.09.017>.
- [24] S.H.H. Lavasani, A.A. Tasnimi, M. Mohamadi Soltani, *A Complete Hysterical Constitutive*



Law for Reinforced Concrete Under Earthquake Loading, 11 (2009) 17–30. <https://www.sid.ir/en/journal/ViewPaper.aspx?ID=173167>.

[25] A.A. Tasnimi, H.H. Lavasani, *Uniaxial Constitutive Law for structural concrete members under monotonic and cyclic loads*, *Sci. Iran.* 18 (2011) 150–162. <https://doi.org/10.1016/J.SCI-ENT.2011.03.025>.

[26] L. Jason, A. Huerta, G. Pijaudier-Cabot, S. Ghavamian, *An elastic plastic damage formulation for concrete: Application to elementary tests and comparison with an isotropic damage model*, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 195 (2006) 7077–7092. <https://doi.org/10.1016/J.CMA.2005.04.017>.

[27] C. Zhang, Z. Zhu, S. Zhu, Z. He, D. Zhu, J. Liu, S. Meng, *Nonlinear Creep Damage Constitutive Model of Concrete Based on Fractional Calculus Theory*, *Mater.* 2019, Vol. 12, Page 1505. 12 (2019) 1505. <https://doi.org/10.3390/MA12091505>.

[28] J.G. Yue, Y.N. Wang, D.E. Beskos, *Uniaxial tension damage mechanics of steel fiber reinforced concrete using acoustic emission and machine learning crack mode classification*, *Cem. Concr. Compos.* 123 (2021) 104205. <https://doi.org/10.1016/J.CEMCONCOMP.2021.104205>.

[29] G.-J. Yin, X.-B. Zuo, X.-D. Wen, Y.-J. Tang, G.-J. Yin, X.-B. Zuo, X.-D. Wen, Y.-J. Tang, *Experimental study and modeling on stress-strain curve of sulfate-corroded concrete*, *Comput. Concr.* 28 (2021) 1. <https://doi.org/10.12989/CAC.2021.28.1.001>.

[30] A.H.M.A. Gafoor, D. Dinkler, *Modeling damage behavior of concrete subjected to cyclic and multiaxial loading conditions*, *Struct. Concr.* (2021). <https://doi.org/10.1002/SUCO.202100109>.

[31] G.T. Houlsby, A.M. Puzrin, *A thermomechanical framework for constitutive models for rate-independent dissipative materials*, *Int. J. Plast.* 16 (2000) 1017–1047. [https://doi.org/10.1016/S0749-6419\(99\)00073-X](https://doi.org/10.1016/S0749-6419(99)00073-X).

[32] N. Ottosen, M. Ristinmaa, *The Mechanics of Constitutive Modeling*, *Mech. Const. Model.* (2005). <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-044606-6.X5000-0>.

[33] H.C. Wu, C.K. Nanakorn, *A constitutive framework of plastically deformed damaged continuum and a formulation using the endochronic concept*, *Int. J. Solids Struct.* 36 (1999) 5057–5087. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(98\)00230-3](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(98)00230-3).

[34] L. Resende, *A Damage mechanics constitutive theory for the inelastic behaviour of concrete*, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 60 (1987) 57–93. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(87\)90130-7](https://doi.org/10.1016/0045-7825(87)90130-7).

[35] L. Song, S.M. Huang, S.C. Yang, *Experimental investigation on criterion of three-dimensional mixed-mode fracture for concrete*, *Cem. Concr. Res.* 34 (2004) 913–916. <https://doi.org/10.1016/J.CEMCONRES.2003.10.013>.

[36] E.E. Gdoutos, *Fracture mechanics : an introduction*, Springer Netherlands, 2005. <https://doi.org/10.1007/1-4020-3153-X>.

[37] J.H. Argyris, G. Faust, J. Szimmat, E.P. Warnke, K.J. Willam, *Recent developments in the finite element analysis of prestressed concrete reactor vessels*, *Nucl. Eng. Des.* 28 (1974) 42–75. [https://doi.org/10.1016/0029-5493\(74\)90088-0](https://doi.org/10.1016/0029-5493(74)90088-0).

[38] W.H. Yang, *A Useful Theorem for Constructing Convex Yield Functions*, *J. Appl. Mech.* 47 (1980) 301–303. <https://doi.org/10.1115/1.3153659>.

[39] R. Widmann, *Fracture mechanics and its limits of application in the field of dam construction*,

- Eng. Fract. Mech.* 35 (1990) 531–539. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(90\)90228-9](https://doi.org/10.1016/0013-7944(90)90228-9).
- [40] I. Ekeland, R. Témam, *Convex Analysis and Variational Problems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999. <https://doi.org/10.1137/1.9781611971088>.
- [41] D. Bigoni, A. Piccolroaz, *Yield criteria for quasibrittle and frictional materials*, *Int. J. Solids Struct.* 41 (2004) 2855–2878. <https://doi.org/10.1016/J.IJSOLSTR.2003.12.024>.
- [42] Y. Tanigawa, Y. and Uchida, *Hysteretic characteristics of concrete in the domain of high compressive strain*, in: *Proc. Annu. Conv. AIJ*, 1979: pp. 449–450.
- [43] H.B. Kupfer, K.H. Gerstle, *Behavior of Concrete under Biaxial Stresses*, *J. Eng. Mech. Div.* 99 (1973) 853–866. <https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0001789>.
- [44] S.R. Green, S.J., Swanson, *Static constitutive relations for concrete*, 1973.
- [45] I. Imran, S.J. Pantazopoulou, *Experimental study of plain concrete under tri-axial stress*, *ACI Mater. Journa.* 93 (1996) 589–601. <https://doi.org/10.14359/9865>.
- [46] I. Imran, S.J. Pantazopoulou, *Plasticity Model for Concrete under Triaxial Compression*, *J. Eng. Mech.* 127 (2001) 281–290. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2001\)127:3\(281\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2001)127:3(281)).